CÉSAR VILLAZÓN HERVÁS

Catedrático del Área de Economía Financiera y Contabilidad (Matemáticas Financieras). Universidad Autónoma de Barcelona.

LINA SANOU VILARRONDONA

Catedrática del Área de Economía Financiera y Contabilidad (Estadística). Universidad Autónoma de Barcelona.

ACCÉSIT PREMIO *ESTUDIOS FINANCIEROS* 1996

Extracto:

EN la mayor parte de los criterios de valoración de derivados se utiliza el arbitraje como elemento de referencia para determinar si el contrato está valorado equitativamente o no. Pero la ausencia de oportunidad de arbitraje implica que la relación entre precios y cantidades sea lineal y que en todo momento se deba ajustar dicha relación a las condiciones imperantes en el mercado.

En este trabajo se pretende estudiar el problema de valoración de los derivados sobre títulos de renta fija aplicando la técnica de valoración cupón cero y el modelo binomial, con el fin de tratar de determinar el sistema de fijación de precios teóricos que mejor se ajusta al precio vigente en todo momento en el mercado financiero correspondiente.

Sumario:

I. Presentación.

II. Problemas que plantea la elección de un criterio de valoración.

III. Propiedades de un sistema de valoración.

IV. Formalización de la relación de arbitraje.

V. Determinación del precio de un título nuevo.

VI. Determinación de los precios de estado.

VII. Interpretación de los precios de estado.

VIII. Límites de la aplicabilidad de la valoración mediante arbitraje.

IX. Generalización del modelo binomial.

X. El modelo binomial aplicado a la valoración de bonos.

XI. Planteamiento del nuevo modelo de valoración.

XII. Sistematización del cálculo del valor de un bono.

XIII. Cálculo del precio de una opción.

XIV. Resumen y conclusiones.

Apéndice.

Bibliografía.

I. PRESENTACIÓN

La utilización cada vez mayor por parte de las empresas de los instrumentos financieros derivados implica que los criterios de valoración empleados tengan una importancia relevante a la hora de verificar la bondad del precio vigente en el mercado; en otras palabras, los administradores de carteras deben tener unos criterios sólidos en los que basarse, tanto a la hora de decidir la operación financiera que deseen llevar a cabo, como durante el seguimiento y liquidación de la misma.

Dado que la inmensa mayoría de las operaciones sobre instrumentos financieros derivados constituyen operaciones denominadas «fuera de balance», puede llevarnos a la conclusión de que no entrañan riesgo y que el resultado de la operación sólo se materializará cuando finaliza la operación; pero dado que se pueden mantener abiertas las posiciones en los mercados de derivados indefinidamente siempre y cuando se cubra únicamente la garantía (que como sabemos es mínima ya que se trata de operaciones con un alto grado de apalancamiento) que exigen las cámaras de compensación de dichos mercados. Al final del proceso, y llegado el caso de que no se puedan cubrir las garantías, es cuando se cae en la cuenta de que las pérdidas se materializarán todas de una vez, y normalmente es demasiado tarde para intentar enmendar.

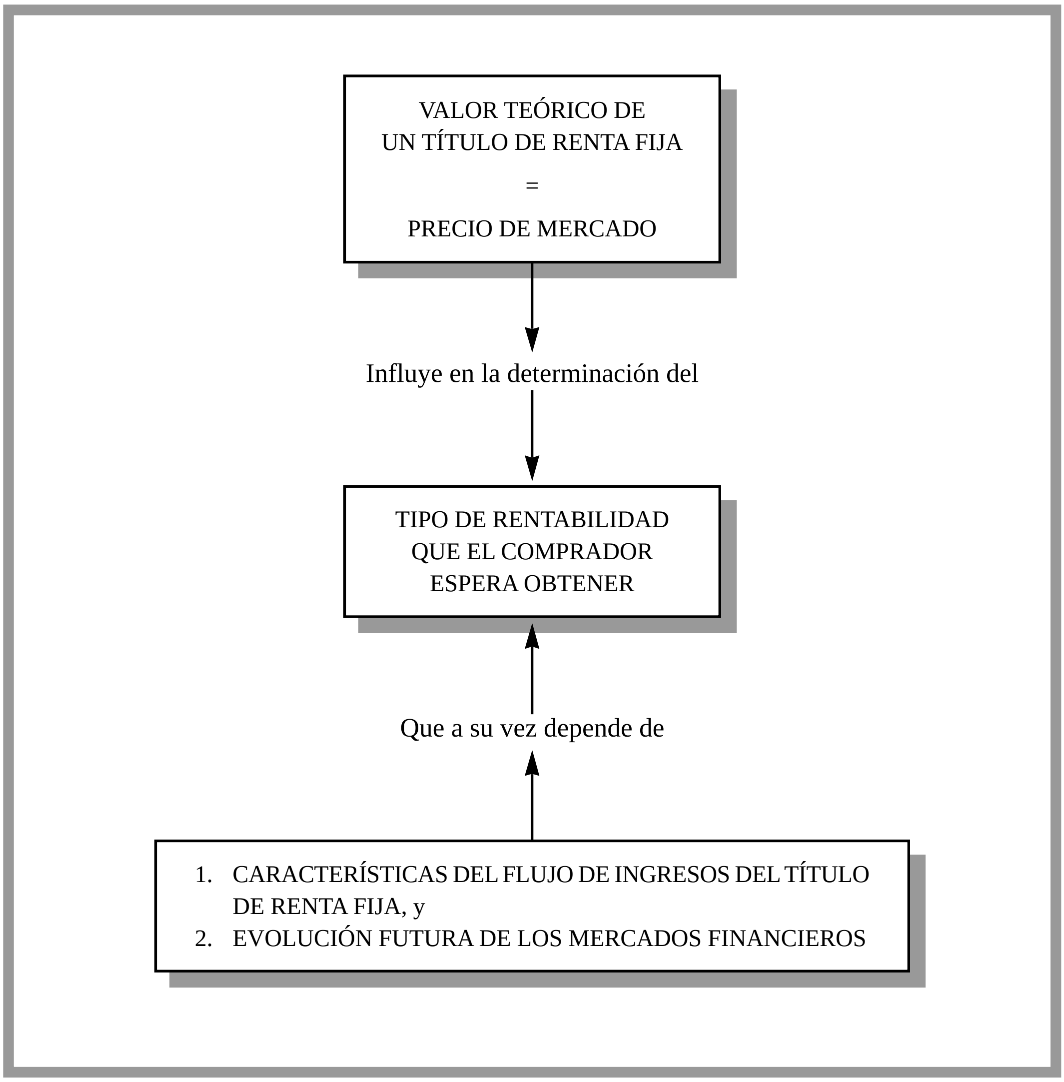
En este trabajo pretendemos tan sólo estudiar el problema de valoración referido exclusivamente a los instrumentos financieros derivados de renta fija y analizaremos los sistemas de valoración o métodos de fijación de precios teóricos que se ajustan mejor para explicar el precio de mercado vigente en cada momento.

II. PROBLEMAS QUE PLANTEA LA ELECCIÓN DE UN CRITERIO DE VALORACIÓN

Se presentan algunos problemas cuando se trata de valorar los instrumentos financieros derivados sobre tipos de interés; el primer problema que debemos resolver se refiere a que el tipo de interés no es un precio; tampoco es un título negociable en el sentido de que sea objeto de compraventa en los mercados financieros: es sencillamente una **variable subyacente** de los contratos de instrumentos financieros derivados sobre tipos de interés, y en un sentido más concreto un tipo de interés es un **bien** en su acepción económica más amplia.

Cuando en un mercado se negocia la compraventa de un bono se fija un precio, lo mismo ocurre cuando se trata de la cesión de un préstamo; en ambos casos existen dos tipos de interés subyacentes a la operación de compraventa: el tipo de cupón en el primer caso y el tipo de interés contractual del préstamo en el segundo; además, en ambos casos el comprador trata de fijar el precio en función del tipo de rentabilidad que espera obtener de su inversión, el cual es función del tipo de interés nominal del título de renta fija objeto de contratación, y es con referencia a este tipo nominal que los mencionados títulos toman el calificativo de fija, ya que la renta proporcionada es constante a lo largo de toda la vida del mismo y sólo se puede ver afectada por razones de «riesgo de crédito» (atrasos en los pagos de intereses y/o de amortización del principal, suspensiones de pagos, quiebras, etc.). En cambio el tipo de rentabilidad obtenido por el comprador depende (además del tipo de interés nominal) de las características del título de renta fija como puede ser su forma de amortización o de recuperación del capital, cláusulas de cancelación o amortización parcial anticipada, etc., que influyen decisivamente en la rentabilidad que en definitiva obtiene el comprador del título.

El problema siguiente con el que nos enfrentamos tiene que ver con la medición de la rentabilidad y la determinación del grado de fiabilidad de alcanzar tal tipo de rentabilidad en el futuro, caso de que su realización sea incierta. La determinación del tipo de rentabilidad se hace mediante el cálculo del TIR (tanto interno de rentabilidad) que tiene como definición aquel tipo de interés que iguala el precio pagado por el comprador con la suma de los valores actuales de los ingresos que espera recibir del título en el futuro. Como sabemos, para que al final del proceso el tipo de rentabilidad obtenido sea por lo menos igual al TIR, todos los ingresos intermedios se deben reinvertir inmediatamente a haberse producido a un tipo igual o mayor al TIR, circunstancia que introduce un elemento más de incertidumbre en el proceso del cálculo del tipo de rentabilidad del título, lo cual dependerá de la coyuntura de mercado en cada momento en que se produzca la reinversión.



Si para contrarrestar los efectos negativos o perjudiciales que sobre el tipo de rentabilidad pueden tener tanto 1 como 2, el comprador del título suscribe una operación de cobertura con algún instrumento financiero derivado, se enfrenta nuevamente a un problema de valoración con el fin de determinar el precio equitativo del título financiero que desea comprar o vender o de otra operación de cobertura que desee contratar (1).

(1) Dadas las características peculiares de los mercados de derivados no podemos asegurar ahora si se tratará de una operación de compra, de venta o de otra contratación distinta.

Al finalizar la operación de cobertura comparará los resultados obtenidos en ambos mercados, y si la cobertura ha resultado ser necesaria y se ha llevado a cabo correctamente, los beneficios obtenidos en el mercado de derivados deben compensar la pérdida ocasionada en el mercado financiero principal, si la operación de cobertura resulta ser innecesaria habrá cosechado pérdidas en el mercado de derivados las cuales disminuirán los beneficios de la operación financiera principal.

Vemos pues que la valoración en el mercado de instrumentos financieros derivados tiene una importancia crucial ya que de ella depende la bondad de la operación de cobertura (y no digamos de una operación de especulación). De tal valoración sólo podemos afirmar, en principio, que viene influenciada por el valor que tenga el título subyacente en el mercado principal, es decir, el precio de un contrato de futuros sobre bonos del Estado depende en primer lugar del precio de los bonos entregables en el momento de la liquidación del contrato, pero de esta afirmación no podemos extraer ninguna conclusión válida, ya que en el precio del propio instrumento de cobertura entra como elemento definidor el valor del título que deseamos proteger. En definitiva precisamos establecer un modelo que nos permita valorar un flujo de ingresos futuro sometido a un determinado nivel de incertidumbre.

En el caso de un vendedor de títulos de renta fija (prestatario), si bien los problemas a los que se enfrenta en el mercado financiero donde capta los recursos es distinto al del inversor, no es muy diferente su posición ante el problema de la valoración de los instrumentos financieros derivados. Así como el comprador desea obtener una rentabilidad lo más alta y estable posible, el prestatario desea obtener recursos a un tipo de coste reducido en todo momento de la vida del préstamo; para conseguirlo puede acudir a los mercados de instrumentos financieros derivados y su actuación en tales mercados estará guiada siempre por la búsqueda de cobertura, teniendo en cuenta que al igual que en el caso del inversor, la cobertura tiene un coste, y que utilizar cobertura sin ser necesaria le puede originar un coste de los recursos todavía mayor.

Las operaciones más habituales para conseguir reducir el coste de los fondos o para estabilizarlo son los *swaps* tanto de tipos de interés como de divisas, los acuerdos sobre tipos de interés futuros (FRA's), los contratos CAP sobre tipos de interés, y los más tradicionales consistentes en operar en los mercados de futuros y de opciones sobre tipos de interés. La actuación en cualquiera de estos mercados requiere conocer los mecanismos de formación de precios con el fin de conseguir el objetivo último planteado por el prestatario: reducir al mínimo el coste de los recursos.

III. PROPIEDADES DE UN SISTEMA DE VALORACIÓN

Antes de aceptar como válido un sistema de valoración, debemos estudiar las propiedades que son deseables que deba cumplir; al igual que ocurre en cualquier sistema de determinación de precios cuantas más condiciones (de tipo financiero o no) se impongan menos sistemas de valoración válidos se podrán encontrar, por ello las condiciones impuestas deben estar ampliamente justificadas. Dejando para más adelante su justificación sólo impondremos dos condiciones: el sistema de valoración propuesto debe admitir la propiedad de **linealidad** y no debe permitir el arbitraje, o si se prefiere debe asegurar la **ausencia de arbitraje libre de riesgo**.

Por linealidad entendemos la propiedad siguiente: si una unidad de un título financiero *A* tiene un precio p_a, un conjunto de x_a unidades de tal título tendrá como valor $p_a x_a$, y si otro título *B* tiene como valor unitario p_b y poseemos x_b unidades de esta clase de títulos, el valor conjunto de la cartera formada por las cantidades indicadas de ambos títulos es:

$$p_a x_a + p_b x_b \tag{1}$$

Aunque sea una propiedad que hasta cierto punto se puede considerar trivial, lo cierto es que muchas veces en los mercados financieros el precio de un título no sirve para valorar el precio de un paquete formado por un elevado número de títulos y recíprocamente, a partir del precio atribuido a un paquete de títulos no se puede deducir cuál es el precio unitario del título en general.

Esta propiedad de linealidad la cumple, por ejemplo, el criterio del valor actual aplicado al flujo de ingresos futuros de un título de renta fija. Hallado el valor actual del flujo de ingresos de un título A: $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$p_a \equiv V_0 (A_t) = \sum_{t=1}^{n} A_t \ (1 + i)^{-t} \tag{2}$$

el valor actual de x_a títulos es igual a x_a veces el valor actual hallado.

Si además:

$$p_b \equiv V_0 (B_t) = \sum_{t=1}^{n} B_t \ (1 + i)^{-t} \tag{3}$$

es el valor actual de otro título *B*, el valor de una cartera formada por x_a y x_b títulos de clase *A* y *B* respectivamente, será:

$$x_a \sum_{t=1}^{n} A_t (1 + i)^{-t} + x_b \sum_{t=1}^{n} B_t \ (1 + i)^{-t} = p_a x_a + p_b x_b \tag{4}$$

Para entender claramente el significado de arbitraje libre de riesgo consideremos el sistema de valor actual de un flujo de ingresos basado en el tanto interno de rentabilidad (TIR). Supongamos que los tipos de bonos cupón cero a los plazos de amortización indicados son los siguientes:

PLAZOS	TIPOS
1 año	7%
2 años	7'5%
3 años	8%

TABLA 1

Queremos saber cuál es el cupón que debe percibir un bono de nominal 100.000 pesetas que se emite hoy a la par y que se amortiza al cabo de 3 años por el nominal, para que esté en paridad con la estructura de tipos dada. Supondremos que todos los bonos pertenecen a la misma clase de riesgo y que ninguno de los bonos considerados tiene riesgo de crédito.

Debemos resolver una ecuación que iguale el valor actual del precio de emisión del bono con la suma de los valores actuales de su flujo de ingresos, viniendo reflejado el flujo de ingresos en la siguiente tabla:

INSTANTES	FLUJO DE INGRESOS
Final del primer año	Cupón (c)
Final del segundo año ..	Cupón (c)
Final del tercer año	Cupón (c) + 100.000

TABLA 2

El valor actual de cada uno de los ítems del flujo de ingresos del bono es:

$$\frac{c}{1'07}, \quad \frac{c}{(1'075)^2}, \; y, \quad \frac{c + 100.000}{(1'08)^3}$$

De donde resulta la ecuación:

$$100.000 = \frac{c}{1'07} + \frac{c}{(1'075)^2} + \frac{c + 100.000}{(1'08)^3} \qquad (5)$$

Una vez resuelta se obtiene que el valor del cupón debe ser igual a: 7.948'6539817 $\cong$ 7.949 pesetas; o de manera equivalente el tipo de cupón del bono a la par debe ser del 7'94865% anual.

Es difícil que en la realidad se plantee una situación como la de este ejemplo ya que es bastante improbable que se conozcan los tipos de rentabilidad de los bonos cupón cero para cualquiera y cada uno de los plazos posibles, pero de todas formas para alcanzar el objetivo que perseguimos conviene seguir así, sin pérdida de generalidad.

Supongamos que llevamos el análisis un poco más lejos; aplicando los conocimientos más elementales acerca de los bonos, sabemos que si un bono cotiza a la par, el tipo de cupón y el tanto interno de rentabilidad deben coincidir.

Así, si descontamos el flujo de ingresos del bono al tipo del 7'94865%, resulta:

$$\frac{7.948'65}{(1'0795)} + \frac{7.948'65}{(1'0795)^2} + \frac{7.948'65 + 100.000}{(1'0795)^3} =$$

$$= 7.363 + 6.821 + 85.816 = 100.000 \qquad (6)$$

valor que, en principio, nos permite la sustitución de la estructura de tipos de la **tabla 1** por un solo tipo de interés; pero un análisis más detallado de los resultados parciales obtenidos nos debe llevar a una reflexión más profunda.

Si sustituimos en la ecuación (5), *c* por su valor y realizamos el cálculo indicado resulta:

$$\frac{7.948'65}{(1'07)} + \frac{7.948'65}{(1'075)^2} + \frac{7.948'65 + 100.000}{(1'08)^3} =$$

$$= 7.429 + 6.878 + 85.693 = 100.000 \qquad (7)$$

La comparación entre los valores actuales parciales la efectuamos en la siguiente tabla:

VALOR ACTUAL CALCULADO CON:

CURVA DE TIPOS CUPÓN CERO		TIR
7.429	>	7.363
6.878	>	6.821
85.693	<	85.816

TABLA 3

Cualquiera que sea la curva de tipos elegida el resultado final es el mismo, pero utilizando la curva de tipos cupón cero, los dos primeros cupones tienen un valor actual mayor, mientras que el valor actual de los ingresos del tercer año son mayores descontados al TIR. ¿Cuál es el resultado más correcto? Indudablemente el obtenido utilizando la curva de tipos cupón cero, ya que es real y refleja de manera correcta el comportamiento futuro de los tipos de interés de mercado, mientras que la otra no deja de ser un cálculo (y, más concretamente, un valor medio).

Es indiscutible que ambos métodos cumplen la propiedad de linealidad de un sistema de valoración, en cambio el método TIR no está libre de arbitraje. Se podrían comprar en el mercado de *strips* cupones con vencimiento a 1 y a 2 años descontados al tipo TIR y venderlos simultáneamente descontados al tipo cupón cero. Alternativamente y en el mismo mercado se podrían comprar principales y cupones con vencimiento el tercer año actualizados al tipo cupón cero y vender simultáneamente la misma cantidad y al mismo plazo descontadas al tipo TIR. Como este tipo de operaciones simultáneas de compraventa se pueden hacer sin límite de unidades el beneficio sería infinito a un coste nulo.

Vamos a formalizar lo que hemos visto hasta ahora, en particular el sistema de actualización mediante los tipos de actualización de los bonos cupón cero, y vamos a demostrar que si se puede deducir tal sistema de precios no existirán oportunidades de arbitraje sin riesgo en el mercado de bonos, y, en consecuencia, en cualesquiera mercados en los que se negocien títulos de renta fija, y a continuación extenderemos el análisis a los demás mercados en los que el riesgo está presente en el mercado.

IV. FORMALIZACIÓN DE LA RELACIÓN DE ARBITRAJE

Básicamente existen dos formas de expresar la relación de arbitraje o mejor dicho la ausencia de oportunidad de arbitraje en un mercado; una la acabamos de indicar al final del ejemplo del epígrafe anterior y de manera más formal la podemos enunciar de la siguiente manera:

> En un mercado no se puede obtener un beneficio positivo a un coste nulo o negativo, o mejor todavía, toda operación en la que se obtenga una ganancia positiva debe tener un coste positivo estrictamente hablando, es decir:

$$\text{AUSENCIA DE ARBITRAJE} \Rightarrow \text{BENEFICIO} \geq 0 \Rightarrow \text{COSTE} > 0$$

de forma que si el beneficio es positivo el coste también lo debe ser, lo cual se traduce como una máxima de mercado sin oportunidad de arbitraje que afirma «un individuo no puede conseguir algo a cambio de nada».

En los mercados financieros en general (aunque sean de derivados) se puede utilizar la condición de arbitraje como un principio que sirve de base para la valoración de flujos de ingresos tanto si son de carácter aleatorio (con distribución de probabilidad conocida), como si son de carácter fijo. Dicho principio de valoración en ausencia de arbitraje se expresa de la siguiente forma:

> **Dos títulos financieros o dos carteras que produzcan el mismo (idéntico) flujo de ingresos deben tener el mismo precio en el mercado.**

En efecto, supongamos dos carteras Q_1 y Q_2, que producen las mismas rentas, tuvieran precios diferentes p_1 y p_2, siendo, por ejemplo, $p_1 < p_2$, entonces la cartera $Q_1 - Q_2$ constituye una oportunidad de arbitraje, ya que la mencionada cartera tendría un precio negativo: $p_1 - p_2 < 0$, y un flujo de ingresos nulo, ya que las dos carteras proporcionan la misma renta.

V. DETERMINACIÓN DEL PRECIO DE UN TÍTULO NUEVO

Consideremos un mercado financiero en el que se negocian n títulos $A = (A_1, A_2,... A_n)$ cuyos precios unitarios vienen dados por el vector fila: $p = (p_1, p_2,\dots p_n)$. Supongamos que una entidad emite un nuevo título o que en el mercado aparece un nuevo producto financiero cuyo flujo de ingresos dependerá de cuál sea la situación del mercado en aquel momento. Si como siempre la situación del mercado la reflejamos a partir del estado de la naturaleza, el flujo de ingresos previsto (para el primer período) vendrá dado por $W = (W_1, W_2,...W_n)$, indicando los subíndices $(1, 2, ..., n)$ los respectivos estados de la naturaleza. Como podemos observar consideramos que existen tantos activos en el mercado como estados de la naturaleza se puedan presentar, restricción que justificamos más adelante en el epígrafe VIII.

Los activos financieros existentes en el mercado $(A_1, A_2,\ldots A_n)$, también ofrecen un nivel de ingresos según cuál sea el estado de la naturaleza. Si designamos por r_{ei} el ingreso proporcionado por cada unidad poseída del título i cuando el estado de la naturaleza es e, la matriz r de ingresos vendrá dada por:

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1i} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2i} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{e1} & r_{e2} & \ldots & r_{ei} & \ldots & r_{en} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{ni} & \ldots & r_{nn} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Deseamos formar una cartera $Q = (Q_1, Q_2,\ldots, Q_n)$, en la que Q_i designa la cantidad de títulos poseídos de la clase A_i, que duplique exactamente el flujo de ingresos del título.

El flujo de ingresos esperado del título en el estado e es W_e, y el flujo de ingresos esperado en tal estado de los títulos poseídos en la cartera es igual a:

$$r_{e1}Q_1 + r_{e2}Q_2 + \ldots + r_{ei}Q_i + \ldots + r_{en}Q_n = \sum_{i=1}^{n} r_{ei}Q_i \qquad \forall e = 1, 2, \ldots, n \tag{9}$$

Si los ingresos proporcionados por la cartera han de duplicar exactamente el ingreso proporcionado por el nuevo título en todos y cada uno de los estados de la naturaleza, se debe cumplir:

$$W_e = \sum_{i=1}^{n} r_{ei}Q_i \qquad \forall e = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

La composición de la cartera se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} r_{11}Q_1 + r_{12}Q_2 + \dots + r_{1i}Q_i + \dots + r_{1n}Q_n = W_1 \\ r_{21}Q_1 + r_{22}Q_2 + \dots + r_{2i}Q_i + \dots + r_{2n}Q_n = W_2 \\ \dots \\ r_{e1}Q_1 + r_{e2}Q_2 + \dots + r_{ei}Q_i + \dots + r_{en}Q_n = W_e \\ \dots \\ r_{n1}Q_1 + r_{n2}Q_2 + \dots + r_{ni}Q_i + \dots + r_{nn}Q_n = W_n \end{array} \tag{11}$$

Sistema que tendrá una solución única siempre que la matriz de ingresos de los títulos tenga rango igual a *n*, lo cual significa que los títulos tienen ingresos independientes, y que ningún activo ya existente está formado por una combinación lineal de otros también ya existentes en el mercado. Asimismo consideramos que los estados de la naturaleza forman un conjunto independiente.

Una vez calculada la composición de la cartera podemos hallar el precio que debemos pagar para poder formarla, que en este caso sería:

$$\begin{array}{l} p \,.\, Q = p_1Q_1 + p_2Q_2 + \dots + p_nQ_n \\ p \,.\, Q = \sum_{i=1}^{n} p_iQ_i \end{array} \tag{12}$$

que evidentemente debe coincidir con la suma que está dispuesto a pagar el inversor para formar dicha cartera, que designaremos como la riqueza inicial:

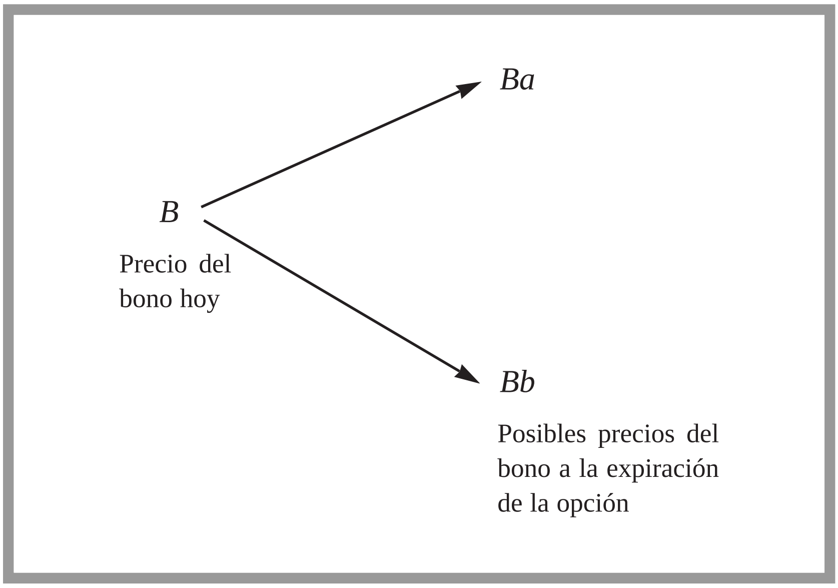
$$W(0) = p \,.\, Q \tag{13}$$

Dado que esta cartera genera un flujo de ingresos de W_1 en el estado 1, de W_2 en el estado 2, etc., de W_n en el estado *n*, los cuales coinciden con el flujo de ingresos del nuevo título, el precio de éste deberá (en ausencia de oportunidades de arbitraje), ser el mismo que el de la cartera, ya que ambos producen el mismo flujo de ingresos, es decir:

$$W(0) = p \,.\, Q = \textbf{PRECIO UNITARIO DEL NUEVO TÍTULO} \tag{14}$$

1. Aplicación: límites del precio de una opción de compra sobre bonos.

Tratemos de determinar el precio de una opción europea de compra (*call*) sobre un bono. Sea *B* el precio vigente hoy de un bono y consideremos que en el momento del vencimiento de la opción sólo se pueden presentar dos estados de la naturaleza (**A**, **B**), uno de alza de precios (baja en los tipos de rentabilidad de los bonos) y otro de baja en el precio del bono (lo cual representa un alza en los tipos de rentabilidad), según el siguiente esquema:



Si el precio de ejercicio de la opción de compra es K con $Bb < K < Ba$ el ingreso neto proporcionado por la opción será:

$$Ba - K \text{ en el estado } \mathbf{A}$$

$$0 \text{ en el estado } \mathbf{B}$$

Construyamos una cartera Q (Q_1, Q_2), formada por una cantidad Q_1 de títulos del activo libre de riesgo cuya rentabilidad unitaria y por período designamos por r, y por una cantidad Q_2 de bonos idénticos al subyacente de la opción cuyo precio total será $Q_2 b$. Con esta cartera queremos duplicar el flujo de ingresos procedente de la opción en cada uno de los estados de la naturaleza, con lo que tendremos las siguientes ecuaciones:

	VALOR DE LA CARTERA		VALOR DE LA OPCIÓN	
Estado de la naturaleza ***A***:	$Q_1\,(1 + r) + Q_2Ba$	$=$	$Ba - K$	(15)
Estado de la naturaleza ***B***:	$Q_1\,(1 + r) + Q_2Bb$	$=$	0	(16)

Debido a las condiciones particulares impuestas a esta aplicación, siempre tendrá solución el sistema planteado con respecto a la composición de la cartera, obteniéndose:

$$Q_1 = -\frac{b\,(Ba - K)}{(1 + r)\,(a - b)} \qquad\qquad Q_2 = \frac{Ba - K}{(a - b)\,B} \tag{17}$$

Esta solución significa que ha de construir una cartera Q de la siguiente forma: se debe pedir prestado al tipo libre de riesgo la cantidad $\frac{b\,(Ba - K)}{(1 + r)\,(a - b)}$ y se debe invertir en la compra de bonos $Q_2B = \frac{Ba - K}{(a - b)}$. Como que al final del período, que coincide con la fecha de expiración de la opción, se obtendrá de la cartera los mismos ingresos que con la opción en cada estado de la naturaleza, tendremos que el precio de coste de formación de la cartera, será:

$$PQ = Q_1 \times 1 + Q_2 \times B = \frac{(Ba - K)\,(1 + r - b)}{(1 + r)\,(a - b)} \tag{18}$$

1

Ejemplo:

Tratemos de calcular el precio de una opción de compra europea a 6 meses al precio de ejercicio de 1.050 sobre un bono cuyo precio ex-cupón vigente hoy en el mercado es de 1.040 considerando que en los dos posibles estados de la naturaleza, el precio del bono puede ser de 1.144 en el estado ***A*** $(a = 1'1)$ y de 945'45 en el estado ***B*** $\left[b = (1'1)^{-1} = \frac{1}{1'1}\right]$ siendo el tipo libre de riesgo a 6 meses del 5%.

El valor de la opción en la fecha de vencimiento de la misma es:

Máx (1.144 – 1.050'0) = 94 en el estado ***A***

Máx (945'45 – 1.050'0) = 0 en el estado ***B***

La cartera que duplica los valores de la opción en cada uno de los estados está formada por:

$$Q_1 = -\frac{(1'1)^{-1} \ x \ (1.040 \ x \ 1'1 - 1.050)}{(1 + 0'05) \ x \ (1'1 - 1/1'1)} = -426'30$$

(19)

$$Q_2 = -\frac{1.040 \ x \ 1'1 - 1.050}{1.040 \ x \ (1'1 - 1/1'1)} = 0'4734$$

El valor inicial de la cartera será:

- 426'30 x 1 + 0'4734 x 1.040 = - 426'30 + 492'38 = 66'077 (20)

que es el precio de la opción de compra, ya que la cartera duplica exactamente el flujo de ingresos de la opción en cada uno de los estados de la naturaleza como comprobamos a continuación.

VALOR FINAL DE LA CARTERA EN EL ESTADO ***A***:

- 426'30 x 1'05 + 0'4734 x 1.040 x 1'1 = - 447'62 + 541'62 = 94 (21)

VALOR FINAL DE LA CARTERA EN EL ESTADO ***B***:

- 426'30 x 1'05 + 0'4734 x 1.040 x 1/1'1 = - 447'62 + 447'62 = 0 (22)

Valores que coinciden con los de la opción para cada posible estado.

VI. DETERMINACIÓN DE LOS PRECIOS DE ESTADO

Acabamos de establecer el precio de un nuevo título en función de los precios de activos existentes en el mercado; pero sabemos que lo normal **es determinar el precio de un título en función de los ingresos que se esperan obtener del mismo,** es decir:

$$P = f(W_1, W_2, \dots W_n) \Rightarrow P = f(W) \qquad (23)$$

Los precios de los títulos existentes en el mercado, p_i, $i = 1, 2, ..., n$, vendrán determinados por los flujos de ingresos que se esperan obtener en todos y cada uno de los estados de la naturaleza, es decir, p_i es función de r_{11}, r_{21},..., r_{e1}, …, r_{n1}; si para simplificar suponemos que la relación entre ambos es lineal y designamos por $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_e, \dots, \pi_n$, las constantes de la combinación lineal, podemos formar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \pi_1 r_{11} + \pi_2 r_{21} + \dots + \pi_e r_{e1} + \dots + \pi_n r_{n1} \\
p_2 &= \pi_1 r_{12} + \pi_2 r_{22} + \dots + \pi_e r_{e2} + \dots + \pi_n r_{n2} \\
&\dots \\
p_i &= \pi_1 r_{1i} + \pi_2 r_{2i} + \dots + \pi_e r_{ei} + \dots + \pi_n r_{ni} \\
&\dots \\
p_n &= n_1 r_{1n} + \pi_2 r_{2n} + \dots + \pi_e r_{en} + \dots + \pi_n r_{nn}
\end{aligned} \qquad (24)$$

que también podemos expresar en forma matricial: $p^T = r^T\pi$.

Este nuevo sistema tendrá solución ya que el determinante del sistema es el mismo que el del sistema (11), porque la matriz de coeficientes es la transpuesta de la de dicho sistema.

Una vez resuelto el sistema, la interpretación de la solución $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_e, \dots, \pi_n)$, es evidente: el flujo de ingresos de todos los títulos considerados en un estado particular de la naturaleza e, están multiplicados por π_e, en consecuencia, π_e es el «precio» que cabe atribuir a tal estado de la naturaleza (posteriormente, y en algún caso particular, haremos una interpretación cuantitativa más concreta).

Con el fin de precisar más la relación entre el precio de la cartera y los ingresos producidos por ésta vamos a premultiplicar la ecuación $p^T = \mathrm{r}^T\pi$ por Q^T, resultando:

$$Q^T \cdot p^T = Q^T \cdot r^T \cdot \pi \Rightarrow p \cdot Q = \pi^T \cdot r \cdot Q \qquad (25)$$

y como por (13) sabemos que *pQ* es la riqueza inicial *W(0)*, resulta:

$$W(0) = \pi^T \cdot r \cdot Q \qquad (26)$$

Sustituyendo *r* por su expresión (8), *Q* por $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_e, \ldots Q_n)$ y π por $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_e, \ldots, \pi_n)$, y efectuando operaciones, tenemos:

$$W(0) = \pi_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i r_{1i} + \pi_2 \sum_{i=1}^{n} Q_i r_{2i} + \ldots + \pi_e \sum_{i=1}^{n} Q_i r_{ei} + \ldots + \pi_n \sum_{i=1}^{n} Q_i r_{ni} =$$

$$= \pi_1 W_1 + \pi_2 W_2 + \ldots + \pi_e W_e + \ldots + \pi_n W_n = \sum_{e=1}^{n} \pi_e W_e \qquad (27)$$

Esta expresión es la que permite afirmar con rotundidad que los componentes del vector π son los precios de cada estado de la naturaleza.

1. Aplicación: cálculo del precio de una opción en función de los beneficios esperados.

Apliquemos el resultado obtenido al ejemplo que venimos considerando, teniendo en cuenta las siguientes particularidades:

- El vector de precios está formado por $p = (1, B)$, ya que el precio de una unidad monetaria invertida en el activo libre de riesgo es 1 y el precio vigente del bono es *B*.
- Cualquiera que sea el estado de la naturaleza, el flujo de ingresos del activo libre de riesgo es $(1 + r)$.
- El valor del bono es *Ba si* el estado de la naturaleza es ***A***, y *Bb* cuando se produce el estado ***B***.
- Por tanto, la matriz representativa del flujo de ingresos de los activos en cada estado, es:

$$r^T = \begin{bmatrix} 1 + r & 1 + r \\ Ba & Bb \end{bmatrix} \qquad (28)$$

- El vector de precios de estado queda reducido a: $\pi = \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \end{bmatrix}$, ya que sólo hay dos estados de la naturaleza.

El sistema de ecuaciones que define los precios de estado, es:

ECUACIÓN REPRESENTATIVA DE LA INVERSIÓN EN EL ACTIVO LIBRE DE RIESGO:

$$1 = \pi_A (1 + r) + \pi_B (1 + r) \tag{29}$$

ECUACIÓN REPRESENTATIVA DE LA INVERSIÓN EN EL BONO:

$$B = \pi_A Ba + \pi_B Bb \tag{30}$$

Resuelto este sistema, da:

$$\pi_A = \frac{(1 + r) - b}{(1 + r)(a - b)} \qquad \pi_B = \frac{a - (1 + r)}{(1 + r)(a - b)} \tag{31}$$

Para conseguir la correcta interpretación y significado de los precios de estado podemos sustituir los valores hallados en la ecuación (26):

$$W(0) = pQ = \pi^T rQ \tag{32}$$

obteniéndose:

$$(1\ ,\ B) \begin{bmatrix} -\dfrac{b\ (Ba - K)}{(1 + r)(a - b)} \\ \dfrac{Ba - K}{(a - b)\ B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1 + r) - b}{(1 + r)(a - b)} & \dfrac{a - (1 + r)}{(1 + r)(a - b)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + r & Ba \\ 1 + r & Bb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{b\ (Ba - K)}{(1 + r)(a - b)} \\ \dfrac{Ba - K}{(a - b)\ B} \end{bmatrix} \tag{33}$$

El primer miembro de (33) queda:

$$-\frac{b\ (Ba - K)}{(1 + r)\ (a - b)} + \frac{Ba - K}{(a - b)B}\ B = \frac{(Ba - K)\ \left[(1 + r) - b\right]}{(1 + r)\ (a - b)} \qquad (34)$$

expresión que según (18) es igual a *W(0)*, con lo queda demostrada la primera parte de (32).

En cuanto al segundo miembro de (33), efectuando el segundo de los productos indicados, resulta:

$$\left[\frac{(1 + r) - b}{(1 + r)\ (a - b)} \quad \frac{a - (1 + r)}{(1 + r)\ (a - b)}\right] \begin{bmatrix} Ba - K \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (35)$$

expresión que teniendo en cuenta (31), (15) y (16), no es más que el producto del vector de precios de estado por los ingresos proporcionados por la opción en cada uno de ellos, es decir:

$$\left[\pi_1 \quad \pi_2\right] \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} \qquad (36)$$

igualándola al primer miembro obtenido antes queda completada la demostración de la proposición (32).

2

Ejemplo:

Aplicando el resultado obtenido al ejemplo que venimos considerando, teniendo en cuenta que: $r = 5\%$, $a = 1'1$ y que $b = (1'1)^{-1}$, obtenemos:

$$\pi_A = \frac{1'05 - (1'1)^{-1}}{1'05 \times (1'1 - 1/1'11)} = 0'7029478458$$

$$\pi_B = \frac{1'1 - 1'05}{1'05 \times (1'1 - 1/1'11)} = 0'2494331066$$

…/…

…/…

La suma de π_A y π_B es igual a 0'95238 que es exactamente igual al inverso de *(1 + 0'05)*, resultado que podemos establecer de forma general, ya que si sumamos π_A y π_B de (31) queda:

$$\pi_A + \pi_B = \frac{(1+r) - b}{(1+r)\ (a-b)} + \frac{a - (1+r)}{(1+r)\ (a-b)} = \frac{1}{1+r} \qquad (37)$$

Si tenemos en cuenta las restricciones impuestas a los datos del ejemplo las cuales implican que r, π_A y π_B son no negativos, podemos llegar a la conclusión de que $\pi_A\ (1+r)$ y $\pi_B\ (1+r)$ cumplen las condiciones de ser las probabilidades de alcanzar los estados *A* y *B* respectivamente, ya que cumplen las siguientes condiciones:

1. $pr(A) = \pi_A\ (1+r) \geq 0$; $pr(B) = \pi_B\ (1+r) \geq 0$ (38)

2. $pr(A) + pr(B) = 1$ (39)

3. Además y por hipótesis se verifica que la $pr\ (A \cap B) = 0$ (40)

VII. INTERPRETACIÓN DE LOS PRECIOS DE ESTADO

El resultado que acabamos de deducir en el ejemplo del epígrafe anterior lo podemos generalizar a cualquier conjunto de títulos y de estados que cumplan las condiciones indicadas; por este motivo y para conseguir una correcta interpretación de los precios de estado debemos introducir de forma general en el análisis el activo libre de riesgo, tal y como hemos hecho en el ejemplo.

Supongamos, pues, que existe tal activo y que su flujo de ingresos viene dado por *(1 + r)* cualquiera que sea el estado de la naturaleza. Entonces la primera ecuación del sistema (24):

$$p_1 = \pi_1 r_{11} + \pi_2 r_{21} + \dots + \pi_e r_{e1} + \dots + \pi_n r_{n1} \qquad (41)$$

quedaría en la forma:

$$p_1 = \pi_1\ (1+r) + \pi_2\ (1+r) + \dots + \pi_e\ (1+r) + \dots + \pi_n\ (1+r) \qquad (42)$$

Como el activo libre de riesgo tiene un precio igual a la unidad, resulta:

$$1 = \pi_1 (1 + r) + \pi_2 (1 + r) + \dots + \pi_e (1 + r) + \dots + \pi_n (1 + r)$$
$$1 = \sum_{e=1}^{n} \pi_e (1 + r) \qquad (43)$$

Si, como en el ejemplo, designamos por $pr(e) = \pi_e (1 + r) \quad \forall e = 1,...,n$, y, teniendo en cuenta además que $pr(e)$ cumple (38), (39) y (40), podemos considerar que $\pi_e (1 + r)$ es la probabilidad de que alcance el estado e y, en consecuencia, la riqueza atribuida a tal estado.

Otra interpretación procede de la consideración directa de la ecuación (27):

$$W(0) = \sum_{e=1}^{n} \pi_e (1 + r) = \pi_1 (1 + r) + \pi_2 (1 + r) + \dots + \pi_e (1 + r) + \dots + \pi_n (1 + r) \qquad (44)$$

Teniendo en cuenta que $W(0)$ es la riqueza inicial, la podemos interpretar como la suma ponderada de las posibles riquezas que se pueden alcanzar en cada uno de los estados de la naturaleza en el período posterior al considerado; los factores de ponderación son los precios de estado $\pi_e (e = 1, 2,..., n)$, que cumplen las condiciones de ser no negativos y de ser menores que la unidad, ya que su suma es igual a $\dfrac{1}{1 + r}$, en consecuencia, cumplen las condiciones idóneas para ser considerados como factores de actualización, ya que multiplicando la riqueza que se alcanza en cada estado por el «factor de actualización π_e» y sumando se obtiene la cantidad total a invertir en la formación de la cartera.

En definitiva, y a modo de conclusión de este apartado, coexisten dos interpretaciones igualmente válidas de los precios de estado:

- La primera tiene que ver con la probabilidad de alcanzar un estado concreto de la naturaleza, lo cual se traduce en la probabilidad de alcanzar un determinado valor por la compra de la cartera.
- La segunda identifica los precios de estado con los factores de actualización; en este sentido se puede afirmar que el valor inicial de una cartera es igual a la suma de los valores actualizados que puede tomar la cartera en cada uno de los estados de la naturaleza.

Debemos recalcar que son interpretaciones que se pueden dar a los precios de estado, lo cual no quiere decir que sean definiciones de los mismos, y que no podemos tomar partido por ninguna de ellas, en cada caso particular podremos elegir la que más nos convenga.

VIII. LÍMITES DE LA APLICABILIDAD DE LA VALORACIÓN MEDIANTE ARBITRAJE

Dado que algunas de las limitaciones de la técnica de valoración basada en el arbitraje han quedado parcialmente encubiertas y se han ido describiendo de manera fragmentada, creemos que es necesario ponerlas de manifiesto de manera conjunta con el fin de evitar malos entendidos a la hora de su aplicación.

Vamos a empezar por el final porque quizás la última condición introducida es la más importante y la que da nombre a la técnica de valoración; la introducción del activo libre de riesgo nos ha conducido a la sustitución de la primera ecuación del sistema (24) por la ecuación (42), lo cual, además de permitirnos efectuar una interpretación de los precios de estado, establece una conclusión muy importante como es la de que las esperanzas de rendimiento de todos los títulos son iguales entre sí y tienden a igualarse a la del activo libre de riesgo: $1 + r$.

La otra limitación tiene que ver con la relación que hay entre el número de títulos y el número de estados de la naturaleza. En todos los análisis hemos supuesto que existen tantos títulos (independientes) como estados de la naturaleza (asimismo independientes) pero es cierto que pueden coexistir en el mercado en diferentes cantidades, y que en particular es más lógico que haya más estados de la naturaleza que títulos. Esto hace que se deba discutir la existencia y unicidad de la solución del sistema (24) como paso previo al análisis posterior. También es cierto que se debe discutir cuáles de los títulos existentes son los más próximos cuando se trata de valorar un título nuevo, y especificar en detalle cuáles son los estados de la naturaleza que realmente definen un flujo de ingresos determinado.

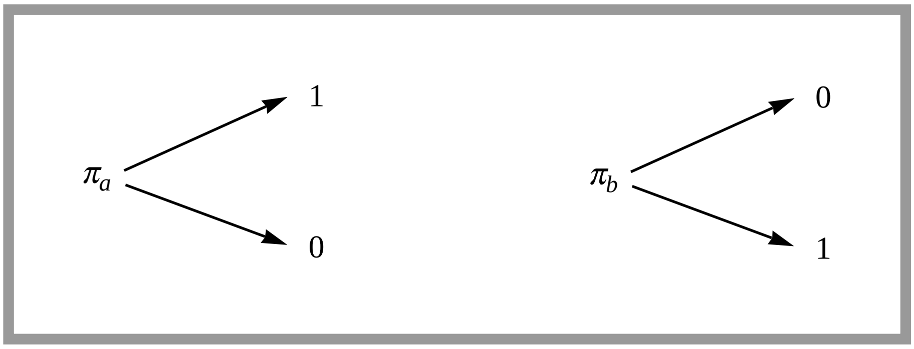
Esto nos lleva a un análisis pormenorizado del modelo de arbitraje en dos fases:

- En la primera fase se analiza el mercado financiero como un todo, y en esta fase se lleva a cabo el análisis global de «todos» los títulos y se incluyen «todos» los estados de la naturaleza, y es en esta fase cuando cabe hablar de existencia y unicidad de los precios de estado.
- En una segunda fase el problema se concreta mucho más, ya que la pretensión del análisis no es global sino específico: se trata de fijar el precio de un título a partir de títulos ya valorados (según el modelo de arbitraje) y de estados de naturaleza definidos en la primera fase. Hacer que un planteamiento riguroso del problema que no conduzca a una solución no sirve de nada, por tanto, se partirá de un sistema compatible en el que el número de títulos sea igual al número de estados y que posea una solución única.

En este tipo de análisis, los precios de estado obtenidos en la primera fase serían verdaderos mientras que los de la segunda serían pseudo-precios de estado; pero dado que la mayor parte de los análisis que se realizan pertenecen a la segunda categoría, cuando, en general, se habla de precios de estado es muy posible que procedan de un planteamiento parcial similar al efectuado en lo que hemos denominado segunda fase.

IX. GENERALIZACIÓN DEL MODELO BINOMIAL

Queremos valorar un título nuevo cuyo flujo de ingresos es 1 si el estado de la naturaleza es ***A*** y 0 si el estado es ***B***. Los títulos que cumplen la condición de retribuir con 1 unidad monetaria si se alcanza un determinado estado y con 0 en cualquier otro caso se denominan títulos Arrow-Debreu, lo mismo que a sus precios de estado; es evidente que debe existir el título simétrico para que los mercados de títulos Arrow-Debreu sean completos, es decir, debe existir el título que remunera con nada si se produce el estado ***A*** y con 1 unidad monetaria si se alcanza el estado ***B***.



Para poder valorar este nuevo título supondremos como hasta ahora que disponemos de dos títulos en el mercado: un bono de precio *B*, que vale *Ba* en el estado ***A*** y *Bb* en el estado ***B***; asimismo disponemos del activo libre de riesgo que remunera cualquier cantidad en cualquier estado con la suma $1 + r = R$ por unidad monetaria invertida.

Una cartera formada por Q_1 unidades monetarias invertidas en el activo libre de riesgo y por Q_2 bonos, es decir: $Q_1 + Q_2B$, tomará los siguientes valores:

$$Q_1R + Q_2Ba \quad \text{en el estado } \boldsymbol{A} \qquad (45)$$

$$Q_1R + Q_2Bb \quad \text{en el estado } \boldsymbol{B} \qquad (46)$$

En primer lugar, elegiremos Q_1 y Q_2, con la condición que la cartera así formada duplique exactamente el primer título Arrow-Debreu, y para que no haya confusiones designaremos por Q_{1A} y Q_{2A} las componentes de la primera cartera, con lo que el sistema será:

$$\begin{aligned} Q_{1A}R + Q_{2A}Ba &= 1 \\ Q_{1A}R + Q_{2A}Bb &= 0 \end{aligned} \qquad (47)$$

que resuelto da:

$$Q_{1A} = \frac{1}{B\,(a-b)} \qquad Q_{2A} = -\frac{b}{R\,(a-b)} \qquad (48)$$

Ya que esta cartera produce el mismo flujo de ingresos que el activo considerado tendrá el mismo precio, con lo que el título Arrow-Debreu que proporciona 1 unidad monetaria en el estado alcista y 0 en el bajista, será:

$$\pi_a = Q_{1A} + Q_{2A} = \frac{R-b}{R\,(a-b)} \qquad (49)$$

De igual forma, el título Arrow-Debreu que proporciona 1 unidad monetaria en el estado bajista y 0 en el alcista, lo podremos duplicar con otra cartera formada por Q_{1B} y Q_{2B}, siendo el sistema a resolver:

$$\begin{aligned} Q_{1B}R + Q_{2B}Ba &= 0 \\ Q_{1B}R + Q_{2B}Bb &= 1 \end{aligned} \qquad (50)$$

que resuelto da:

$$Q_{1B} = -\frac{1}{B\,(a-b)} \qquad Q_{2B} = \frac{b}{R\,(a-b)} \qquad (51)$$

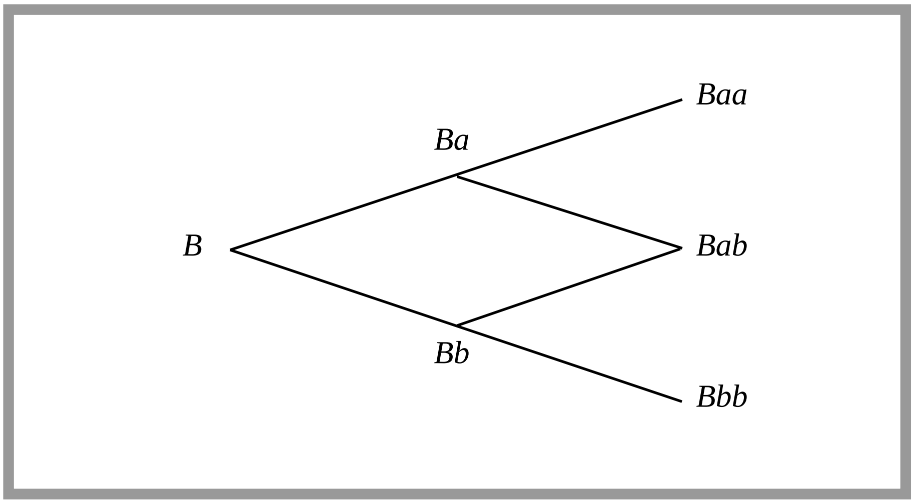
y el precio del título será:

$$\pi_b = Q_{1B} + Q_{2B} = \frac{a-R}{R\,(a-b)} \qquad (52)$$

Este resultado es simplemente una aplicación de los razonamientos efectuados hasta ahora pero con las siguientes características diferenciadoras:

- Si existen dos estados de la naturaleza ***A*** y ***B***, y dos títulos que producen *(Ba, Bb) y (R, R)* por unidad invertida, podemos construir dos títulos Arrow-Debreu con ingresos *(1, 0)* y *(0, 1)*, y a continuación valorar estos títulos utilizando los precios de los otros dos títulos existentes en el mercado.
- Los precios de estado π_a y π_b no dependen de la probabilidad de que los precios de los títulos suban o bajen. Sólo dependen de «cuánto» pueden subir o pueden bajar, es decir, sólo dependen de los parámetros del proceso estocástico que rige el comportamiento del título. Una vez conocido el proceso estocástico se pueden hallar los precios de cada estado.
- Ya que se cumple la ecuación: $\pi_a + \pi_b = \frac{1}{R}$, podemos deducir que una cartera que paga 1 unidad monetaria en cualquier estado, debe tener hoy un precio de $\frac{1}{R}$ unidades monetarias, lo cual expresa la equivalencia financiera representativa del valor de un bono cupón cero (libre de riesgo) y el precio de amortización de tal bono al final del período considerado.

Estamos en condiciones de generalizar este método a un problema que incluya tres instantes de tiempo, o lo que es igual dos períodos completos:



Situémonos al final del segundo período, en dicho instante sabemos que un título puro para 1 unidad monetaria si el estado de la naturaleza es *AA*, por ejemplo, y por tanto según el razonamiento efectuado antes, el precio de estado al finalizar el primer período sería de $\frac{R - b}{R\,(a - b)}$; también y por el mismo razonamiento sabemos que no retribuye nada cuando el estado es *B*, *Ba* o *BB*, entonces si retrocedemos un período más y nos situamos en el instante inicial, podemos calcular el precio de estado consistente en alcanzar al finalizar el segundo período dos alzas consecutivas, que sería:

$$\pi_{aa} = \pi_a \left[\frac{R - b}{R\,(a - b)} \right] + \pi_b \,.\, 0 = (\pi_a)^2 \tag{53}$$

Efectuando el mismo razonamiento para los demás precios de estado, tendríamos:

$$\begin{aligned} \pi_{bb} &= (\pi_n)^2 \\ \pi_{ab} &= \pi_{ba} = 2\pi_a\pi_b \end{aligned} \tag{54}$$

Por inducción, el precio hoy de un estado al finalizar un período *n* cualquiera depende única y exclusivamente del número de alzas *a* y del número de bajas $n - a = b$, con lo que el precio de tal estado será:

$$\pi_{a,\, n-a} = \binom{n}{a} \pi_a^{\,a}\, \pi_b^{\,n-a} \tag{55}$$

que no es más que la probabilidad de que ocurra un determinado suceso, cuando la ley que rige tal realización sigue una distribución binomial; una vez debemos resaltar que la probabilidad de que ocurra uno u otro estado no influye en el resultado final, y por tanto, éste es independiente de la probabilidad establecida *a priori* acerca de que se produzca uno cualquiera de los estados. El precio del bono dependerá del estado que tenga lugar y la «probabilidad» asociada al valor atribuido al bono se recoge a través de los precios de estado π_a y π_b, que como hemos hecho notar en el epígrafe VII desempeñan un papel que se puede asimilar a una distribución de probabilidad.

Como conclusión de este epígrafe, podemos manifestar que una vez conocidos los precios de estado, podemos evaluar cualquier título siempre que nos proporcionen sus flujos de ingresos en todos los estados de la naturaleza considerados, como podemos ver en el ejemplo siguiente.

3

Ejemplo:

Supongamos que queremos calcular el precio de una opción de compra europea a 1 año sobre un bono cuyo precio vigente en el mercado es de 1.040 y su precio de ejercicio es de 1.050; los valores de *a* y *b* son los mismos que hemos considerado hasta ahora, es decir, 1'1 para *a* y de $(1'1)^{-1}$ para *b*, y el tipo de interés libre de riesgo es del 5%, con lo que $R = 1'05$. La unidad temporal de referencia para *a*, *b* y *R* es el semestre.

Los precios de estado referidos al final del primer semestre son:

$$\pi_a = \frac{R - b}{R\,(a - b)} \Rightarrow \pi_a = \frac{1'05 - (1'1)^{-1}}{1'05\,\left[1'1 - (1'1)^{-1}\right]} \Rightarrow \pi_a = 0'70295$$

$$\pi_b = \frac{a - R}{R\,(a - b)} \Rightarrow \pi_b = \frac{1'1 - 1'05}{1'05\,\left[1'1 - (1'1)^{-1}\right]} \Rightarrow \pi_b = 0'24943$$

Podemos comprobar, en primer lugar, que la suma de los precios de estado es igual al inverso de *R*:

$$\pi_a + \pi_b = \frac{1}{R} \Rightarrow 0'70295 + 0'24943 = 0'95238 = \frac{1}{1'05}$$

A continuación calculamos los precios de estado correspondientes al final de año:

$$\pi_{aa} = (\pi_a)^2 = 0'4941$$
$$\pi_{ab} = 2\pi_a\pi_b = 0'3507$$
$$\pi_{bb} = (\pi_b)^2 = 0'0622$$

El precio de la opción de compra vendrá dado por:

$$C_2 = \sum_{a=1}^{2} \frac{2!}{a!\,(n-a)!} \,.\, \pi_a^{a}\, \pi_b^{n-a} \,.\, máx\,\left[a^a b^{n-a} B - K, 0\right]$$

$$C_2 = 0'4941 \,.\, máx\,[218'4; 0] + 0'3507 \,.\, máx\,[-10; 0] + 0'0622 \,.\, máx\,[-190'40; 0]$$

$$C_2 = 107'91$$

X. EL MODELO BINOMIAL APLICADO A LA VALORACIÓN DE BONOS

Hasta ahora nuestro interés lo hemos centrado en presentar el modelo binomial sin más pretensiones, ya que su aplicación al cálculo del precio de una opción de compra sobre un bono ha servido más bien para ilustrar la sencillez de su utilización, y en ningún caso hemos pretendido demostrar una nueva técnica de evaluación, ya que la valoración de un título de renta fija presenta algunas particularidades que es necesario tener en cuenta.

La primera de estas particularidades y quizás la más importante, es que un título de renta fija se amortiza en una fecha y por un valor generalmente conocido; ello hace que en el árbol que configura el modelo binomial, conozcamos su final con certeza, es decir, el árbol no se puede prolongar indefinidamente y además su punto final es conocido, hecho que no ocurre, por ejemplo, con una acción ordinaria.

Otro elemento al cual queremos referirnos es a la ausencia de la probabilidad de alcanzar un estado de la naturaleza concreto, tanto en la solución final del problema como en cada una de las etapas intermedias; parece pues que en cualquier período la probabilidad de todos y cada uno de los estados de la naturaleza sea la misma, cosa que constituye un razonamiento erróneo, ya que es posible que se considere por parte del analista más factible alcanzar un estado que otro, elemento que debemos introducir en el análisis de manera explícita, de forma que afecte y esté presente en el resultado obtenido.

Ligado a este último argumento, está el concepto de volatilidad de los tipos de interés o si se prefiere del precio de los bonos; la volatilidad influye básicamente en los bonos emitidos en fechas recientes o en los que están bastante alejados de su fecha de amortización. En nuestro modelo básico podemos recoger la volatilidad y hacerla explícita considerando que los valores al alza (o a la baja) están influenciados básicamente por la volatilidad presente en el mercado.

Y, por último, el modelo de valoración elegido debe ser interactivo; ello significa que en cada momento se deben comparar los resultados «teóricos» de nuestro modelo con la realidad y efectuar los ajustes o correcciones necesarios en los parámetros con el fin de poder valorar de forma más precisa el título objeto de seguimiento. Esta característica que creemos que es muy necesaria en un modelo de valoración de instrumentos financieros derivados sobre tipos de interés, ya que en la mayoría de mercados se exige «seguir al mercado», por ello es conveniente disponer de un modelo flexible que permita ajustes instantáneos.

XI. PLANTEAMIENTO DEL NUEVO MODELO DE VALORACIÓN

El modelo binomial considerado hasta ahora se basa en un proceso multiplicativo, de manera que si el precio de un bono en un instante es B, al final del período será Ba o Bb, y si hemos elegido: $b = 1/a$, entonces las rentabilidades medidas (exclusivamente) como variaciones de los precios serán simétricas.

Para que esta propiedad se cumpla siempre, es preciso que este concepto teórico, lo traslademos al campo del cálculo de rentabilidades a partir de cotizaciones reales; imaginemos que disponemos de cinco observaciones de precios correspondientes a cinco instantes de tiempo consecutivos de un bono, y que éstas son: 100, 115, 125, 115, 100; las ganancias absolutas (o pérdidas absolutas) son 15, 10, -10, -15, y, si como parece ser el cálculo habitual (más bien naive), la rentabilidad en porcentaje sería:

$$\frac{15}{100}\,100 \;=\; 15\%; \quad \frac{10}{115}\,100 \;=\; 8'70\%; \quad \frac{-10}{125}\,100 \;=\; -8\%; \quad \frac{-15}{115}\,100 \;=\; -13'04\%$$

Aunque los resultados en cifras absolutas son completamente simétricos, la operación llevada a cabo para expresar los resultados relativos de cada operación particular de compraventa han dejado de ser simétricos. ¿Qué ha ocurrido? Pues que aunque los numeradores de las fracciones son los mismos (los resultados en valores absolutos) los denominadores no son los mismos en caso de ganancia que en caso de pérdida, y resulta que cuando hemos perdido 15 unidades monetarias, «sólo» hemos perdido el 13%, mientras que en el caso de beneficio hemos ganado el 15%.

Este absurdo se elimina si cambiamos la definición de resultado negativo y tomamos como definición la siguiente: si los precios consecutivos de un título son B_{t-1} y B_t, la rentabilidad R_t, se define como el logaritmo neperiano del cociente de ambos $\frac{B_t}{B_{t-1}}$, es decir:

$$R_t \;=\; ln\left(\frac{B_t}{B_{t-1}}\right) \tag{56}$$

Aplicando esta fórmula al ejemplo propuesto, tendríamos:

$$R_1 \;=\; ln\,\frac{115}{100} \;=\; 0'13976 \;\cong\; 13'98\% \qquad R_2 \;=\; ln\,\frac{125}{115} \;=\; 0'08338 \;\cong\; 8'34\%$$

$$R_3 \;=\; ln\,\frac{115}{125} \;=\; -0'08338 \;\cong\; -8'34\% \qquad R_4 \;=\; ln\,\frac{100}{115} \;=\; -0'13976 \;\cong\; -13'98\%$$

Supongamos que el precio inicial del bono es *B*, si el precio sube será *Ba* y si disminuye será $\frac{B}{a} = Bb$. El resultado de la compraventa del bono será $ln\left(\frac{Ba}{B}\right) = lna$, en caso de alza, y de

$$ln\left[\frac{Bb}{B}\right] = ln\left[\frac{\frac{B}{a}}{B}\right] = ln\left[\frac{1}{a}\right] = -lna,$$ en caso de baja del precio.

En este caso los resultados son completamente simétricos, y el camino seguido por los precios tanto en el caso de alza continuada como de una baja indefinida sigue un proceso cuyos elementos varían en progresión geométrica de razón *a* y *1/a*, respectivamente. El proceso presenta además una particularidad muy importante, cuando la tendencia es bajista, el precio de un título nunca llega a ser cero, lo cual en el caso de un bono es muy importante porque nunca puede alcanzar precios negativos.

Otra característica del árbol que debemos construir, es que cuanto mayor sea *a* mayor amplitud alcanzará el árbol en menos tiempo, es decir, las ramas extremas se separan (o divergen) más rápidamente, y como que en el árbol que estamos considerando, en cada etapa sólo hay dos posibilidades: alza o baja, cada una con una probabilidad de ocurrencia *p* y *1 – p*, respectivamente, el árbol seguirá una distribución binomial cuya varianza expresará la amplitud del árbol.

Si construimos un árbol que refleje la evolución de la rentabilidad producida por los valores de un bono a partir de los tipos al contado a corto plazo, conseguiremos que el número de nodos del árbol tienda a ser suficientemente grande de manera que en el límite la distribución binomial se habrá transformado en una distribución lognormal con media y varianza conocidas; con el fin de no perder continuidad en el razonamiento, la deducción de lo que acabamos de enunciar se puede encontrar en el **apéndice** al final de este trabajo.

En el **apéndice** también hemos demostrado que conocida la varianza de los tipos a corto en un conjunto de ramas del árbol, el valor de *a* es: $a = e^{\sigma\sqrt{t}}$, en la que σ es la desviación estándar de las ramas consideradas y *t* el tiempo en la que ésta tiene lugar; si para simplificar tomamos *t* como unidad de tiempo, el año por ejemplo, lo cual significa que σ^2 es la varianza anual, tendremos que $a = e^{\sigma}$, y $b = e^{-\sigma}$, siendo *a* y *b* las tasas de crecimiento y decrecimiento anual, respectivamente.

La elección de los tipos al contado a corto plazo presenta una ventaja adicional, ya que además de que éstos siguen una distribución lognormal, tienen la propiedad de revertir hacia la media; cualquier modelo que pretenda explicar el comportamiento del valor de un bono es preciso que cumpla esta propiedad, ya que al final el valor de un bono es igual a su precio de amortización; existen otros modelos con hipótesis similares acerca del comportamiento de los tipos a corto plazo, pero que no cumplen con la exigencia de ser reversibles hacia la media; el cumplimiento de esta propiedad tiene que ver con la volatilidad esperada, si el valor de un bono debe tender hacia su precio de amortización, la volatilidad debe ser decreciente, en consecuencia, la desviación estándar σ (y, por lo tanto $a = e^{\sigma}$) será tanto mayor cuantos más años falten hasta la amortización.

La reversión hacia la media tiene otro significado adicional: si un tipo está por encima (por debajo) de la media, más tarde o más temprano tendrá que disminuir (aumentar) de manera que la probabilidad de un alza (una baja) en los tipos es inferior a la probabilidad de una baja (un alza), y esta probabilidad aumenta cuanto más alejados estén los tipos de la media.

1. Aplicación.

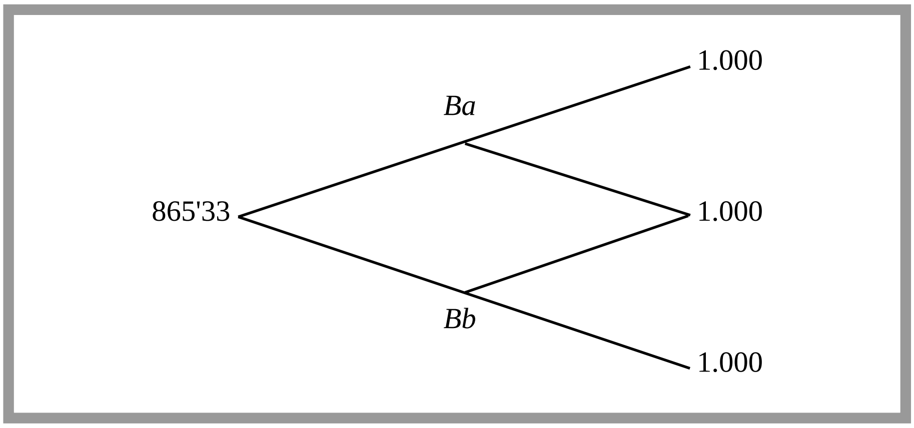
Consideremos que un bono cupón cero al cual le faltan dos años para su amortización por su valor nominal de 1.000 pesetas cotiza a un precio *B* obtenido descontándolo al tipo de actualización cupón cero a dos años. Supongamos que los tipos de rentabilidad y de volatilidad anuales son los siguientes:

PLAZOS en años	TIPOS % anual	VOLATILIDADES % anual
1	7	15
2	7'5	14

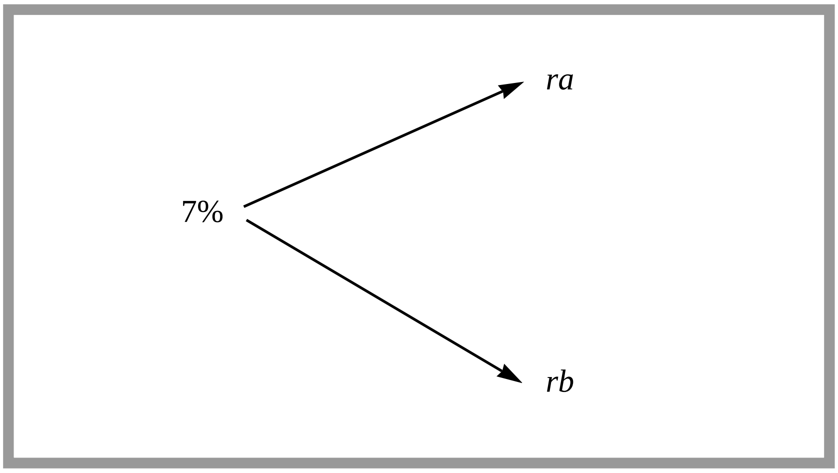
El valor actual del bono será:

$$1.000\ (1 + 0'075)^{-2} = 865'33 \qquad (57)$$

Como el valor del bono debe evolucionar desde el precio inicial de 865'33 hasta el precio de amortización de 1.000 al cabo de dos años, teniendo en cuenta que hay una etapa intermedia al finalizar el primer año, el árbol que representa la evolución del precio del bono será:



y la evolución de los tipos de rentabilidad:



Vamos a empezar deduciendo la ecuación que relaciona r_a y r_b. Del **apéndice** deducimos que: $r_a = e^{\sigma}$ y $r_b = e^{-\sigma}$. Dividiendo miembro a miembro, tomando logaritmos y despejando σ, queda:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{r_a}{r_b} \qquad (58)$$

σ es la volatilidad a dos años, que según la tabla es del 14%, sustituyendo tenemos la primera ecuación del sistema:

$$\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{r_a}{r_b} = 0'14 \qquad (59)$$

La segunda ecuación la obtenemos aplicando la condición de no arbitraje; si suponemos (véase **apéndice**) que la probabilidad de un alza es igual a la probabilidad de una baja y ambas iguales a *1/2*.

Entonces, tenemos que el valor actualizado (al instante inicial) del valor del bono al final del año 1: *Ba* (caso de alza) multiplicado por su probabilidad: *1/2*, más el valor actualizado (también al instante 0) del valor del bono al finalizar el año 1: *Bb* (caso de baja) multiplicado por la probabilidad de ocurrencia: *1/2*, debe ser igual a 865'33, es decir:

$$\frac{0'5 \,.\, Ba \;+\; 0'5 \,.\, Bb}{1'07} \;=\; 865'33 \qquad (60)$$

Como se puede ver la actualización se efectúa al 7% dado que es el tipo de rentabilidad vigente durante el primer año.

De momento tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas, pero nos falta añadir las ecuaciones explicativas de los valores actuales del bono al finalizar el primer año, valores que se calculan actualizando el precio de amortización en cada uno de los escenarios previstos de alza y de baja de tipos; dichas ecuaciones son:

$$\frac{1.000}{1 + r_a} = Ba \qquad y \qquad \frac{1.000}{1 + r_b} = Bb \qquad (61)$$

Resolver el sistema es muy sencillo (2), expresando en (59) r_a en función de r_b, sustituyendo la expresión hallada en (61), y éstas en (60), obtenemos:

$$r_a = 9'13\% \qquad r_b = 6'90\% \qquad Ba = 916'35 \qquad Bb = 935'46$$

XII. SISTEMATIZACIÓN DEL CÁLCULO DEL VALOR DE UN BONO

Este ejemplo se puede completar considerando un horizonte más amplio; para ello consideremos la siguiente evolución de los tipos de rentabilidad cupón cero y de volatilidad:

(2) Estas sustituciones se hacen cómodamente en cualquier hoja de cálculo proponiendo una solución inicial para el tipo a la baja r_b y resolviendo el sistema mediante una función adecuada; en el caso que nos ocupa hemos utilizado EXCEL siendo la herramienta utilizada «buscar objetivo».

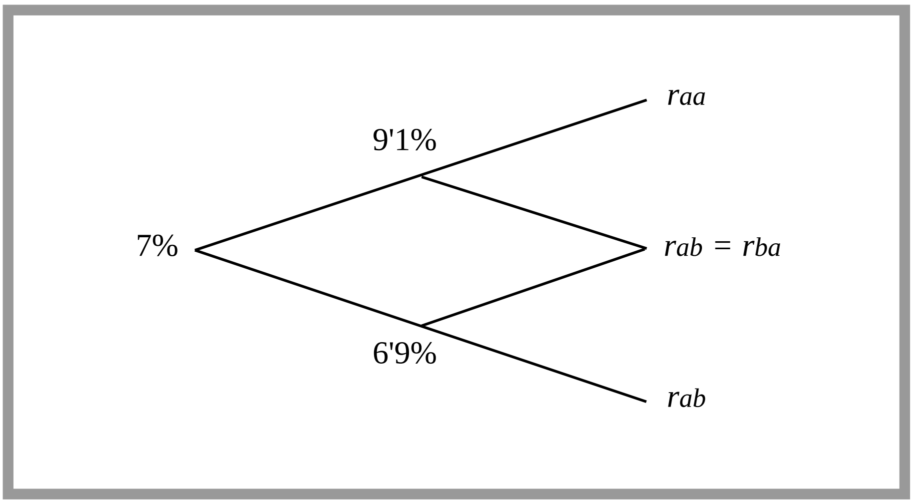
Plazos en años	**Tipos % anual**	**Volatilidades % anual**
1	7	15
2	7'5	14
3	8	13
4	8'25	12
5	8'5	11

Esta estructura de tipos es «normal» en el sentido que los tipos aumentan con el plazo (preferencia de liquidez positiva y creciente), mientras que las volatilidades decrecen con el paso del tiempo.

El proceso de cálculo en cada uno de los árboles a 3, 4, y 5 años es similar al efectuado anteriormente cuando el plazo es de 2 años, y consiste en efectuar los siguientes pasos que hacemos con detalle sólo para el bono a 3 años:

PASO 1

Plantear el árbol representativo de la evolución de los tipos de interés que en caso de un bono a 3 años sería:



Es de observar que como se trata de tipos cupón cero, todos los tipos hallados hasta el momento sirven cuando el plazo de amortización se amplía, con lo cual tan sólo precisamos hallar los tipos correspondientes a las últimas ramas del árbol.

PASO 2

Se deben plantear las ecuaciones que nos permitirán hallar los tipos de rentabilidad cupón cero. Para plantear la primera de ellas debemos tener en cuenta que según (58):

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot ln \frac{r_{aa}}{r_{ab}} = \frac{1}{2} \cdot ln \frac{r_{ab}}{r_{bb}} \tag{62}$$

Formando una ecuación con primera y segunda, y otra ecuación con segunda y tercera, podemos escribir el sistema:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot ln \frac{r_{aa}}{r_{ab}} = \sigma \quad \Rightarrow r_{aa} = r_{ab} \cdot e^{2\sigma} \\ &\frac{1}{2} \cdot ln \frac{r_{aa}}{r_{ab}} = \frac{1}{2} \cdot ln \frac{r_{ab}}{r_{bb}} \Rightarrow r_{aa} r_{bb} = (r_{ab})^2 \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Sustituyendo la primera en la segunda, queda el sistema recurrente:

$$\begin{aligned} r_{aa} &= r_{ab} \cdot e^{2\sigma} \\ r_{ab} &= r_{bb} \cdot e^{2\sigma} \end{aligned} \tag{64}$$

PASO 3

Planteamiento de las ecuaciones que permiten el cálculo de los valores del bono al finalizar el año 2, que serían:

$$B_{aa} = \frac{1.000}{1 + r_{aa}} \qquad B_{ab} = \frac{1.000}{1 + r_{ab}} \qquad B_{bb} = \frac{1.000}{1 + r_{bb}} \tag{65}$$

PASO 4

Aplicación a (65) de la condición de no arbitraje y obtención de las ecuaciones que permitan hallar los valores del bono al finalizar el primer año:

$$B_a = \frac{1/2 \ B_{aa} + 1/2 \ B_{ab}}{1 + 0'091} \qquad B_b = \frac{1/2 \ B_{ab} + 1/2 \ B_{bb}}{1 + 0'069} \qquad (66)$$

PASO 5

Reiteramos la condición de no arbitraje para obtener el valor actual del bono, que sería:

$$B = \frac{1/2 \ B_a + 1/2 \ B_b}{1 + 0'07} \qquad (67)$$

ya que el tipo de rentabilidad cupón cero vigente durante el primer año es del 7%.

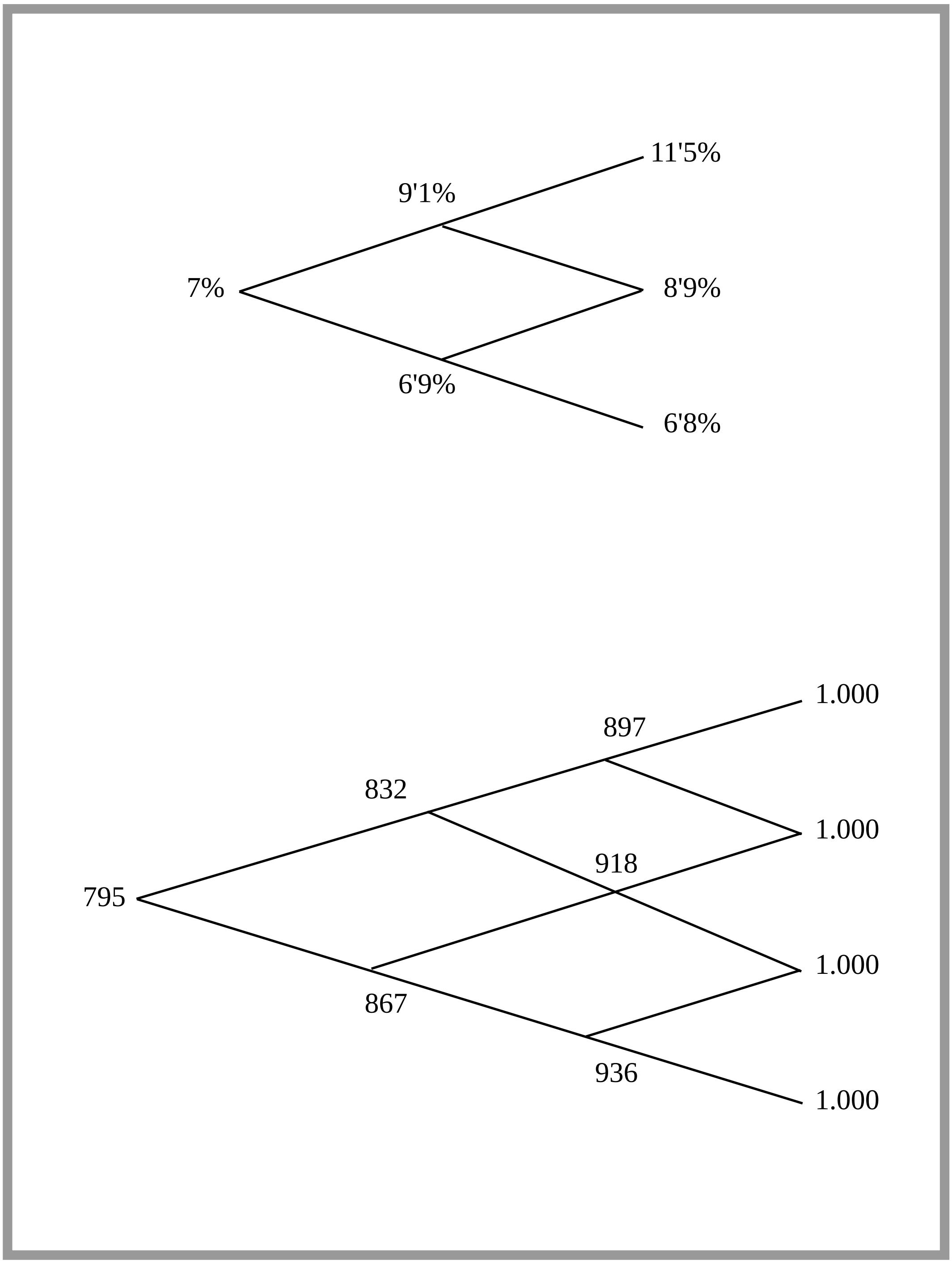
PASO 6

Como se trata de un bono cupón cero y el tipo de rentabilidad de los bonos cupón cero a 3 años es del 8%, tenemos que el valor actual del bono *B*, es conocido e igual a:

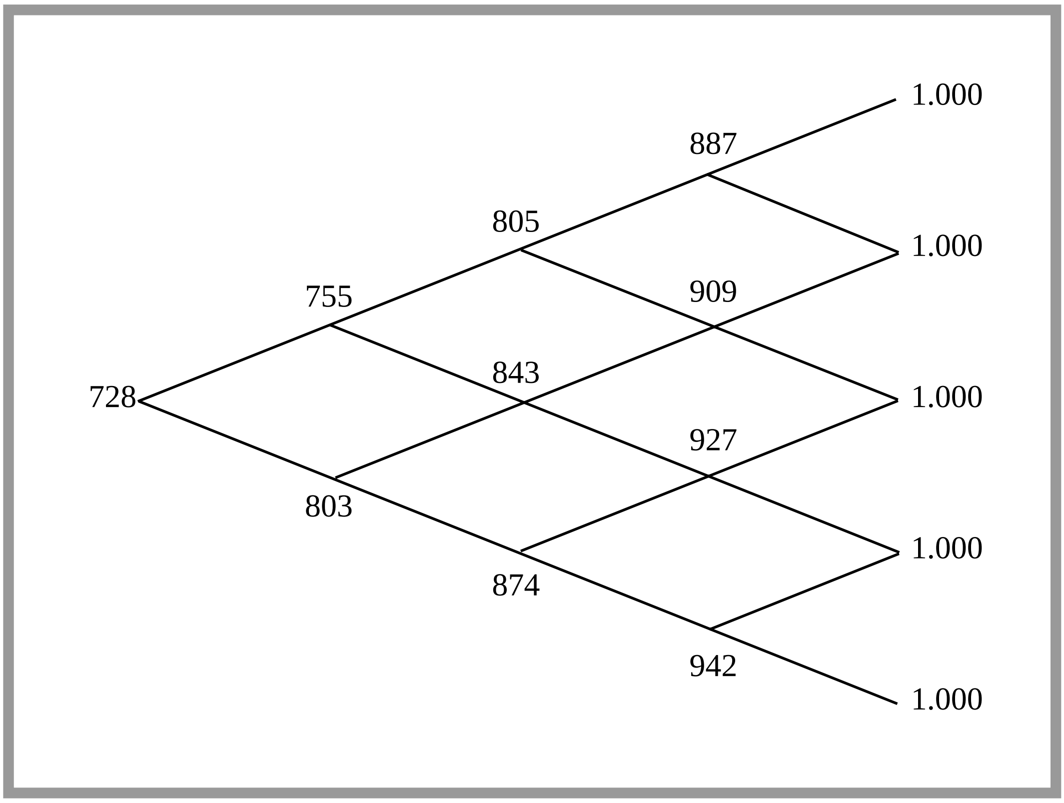
$$1.000 \ (1 + 0'08)^{-3} = 793'8$$

Tenemos, pues, un sistema formado por (64) con dos ecuaciones, por (65) con 3 ecuaciones, por (66) con dos ecuaciones y (67) con una sola ecuación, es decir, 8 ecuaciones en total con 8 incógnitas, que son r_{aa}, r_{ab}, r_{bb}, B_{aa}, B_{ab}, B_{bb}, B_a y B_b, cuya solución puede contemplarse en la página siguiente:

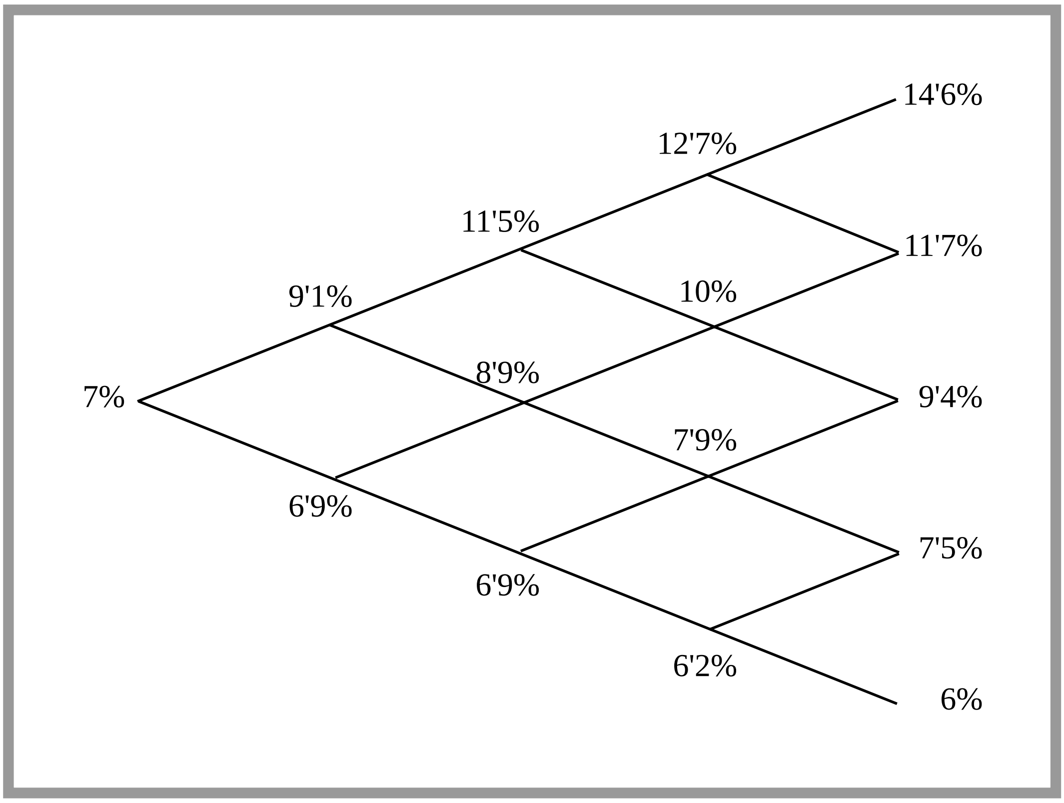
EVOLUCIÓN DE LOS TIPOS CUPÓN CERO Y DEL PRECIO DEL BONO A 3 AÑOS



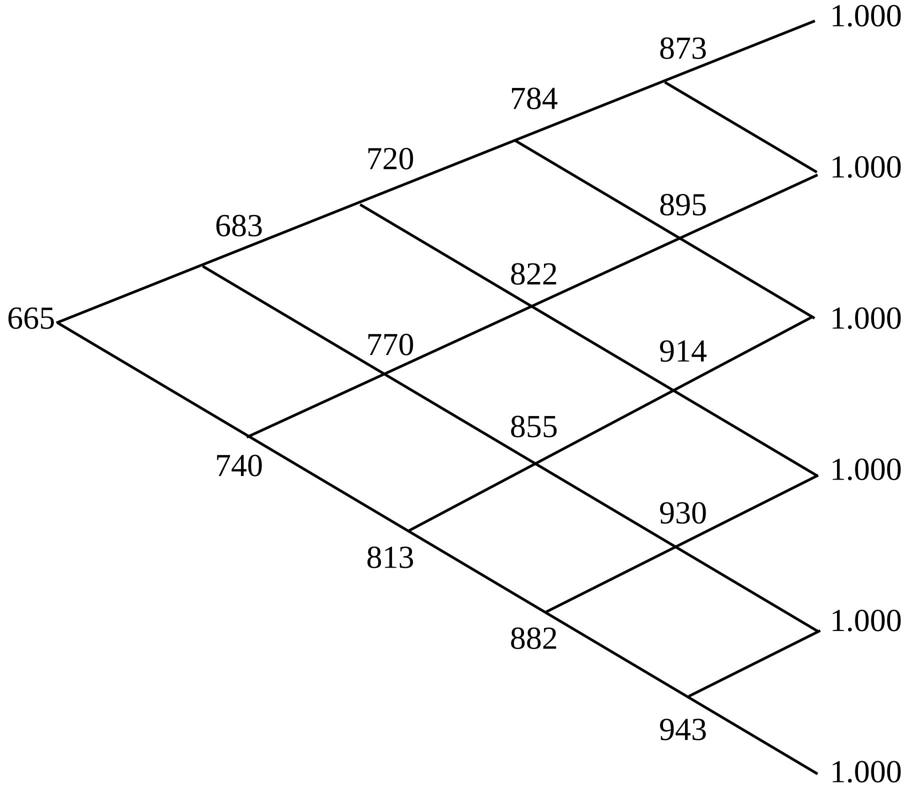
EVOLUCIÓN DEL PRECIO DE UN BONO A 4 AÑOS



EVOLUCIÓN DE LOS TIPOS CUPÓN CERO A 5 AÑOS



EVOLUCIÓN DE LOS VALORES DEL BONO A 5 AÑOS



XIII. CÁLCULO DEL PRECIO DE UNA OPCIÓN

Supongamos que queremos calcular el precio de una opción de compra europea a 3 años, sobre un bono cupón cero con plazo de amortización de 5 años y cuyo precio de ejercicio sea de 850 pesetas.

El flujo de ingresos de la opción en el momento del ejercicio será:

$$Máx\ (0, Baaa - 850) = Máx\ (0, 784 - 850) = 0$$
$$Máx\ (0, Baab - 850) = Máx\ (0, 822 - 850) = 0$$
$$Máx\ (0, Babb - 850) = Máx\ (0, 855 - 850) = 5$$
$$Máx\ (0, Bbbb - 850) = Máx\ (0, 882 - 850) = 32$$

Actualizando este flujo de ingresos y aplicando la condición de no arbitraje, obtenemos los flujos del año 2, que serían:

$$\frac{1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 0}{1 + 0'115337} = 0$$

$$\frac{1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 5}{1 + 0'088931} = 2'2958$$

$$\frac{1/2 \cdot 5 + 1/2 \cdot 32}{1 + 0'06857} = 17'312857$$

Repitiendo la operación, obtendremos el flujo de ingresos correspondiente a la finalización del primer año:

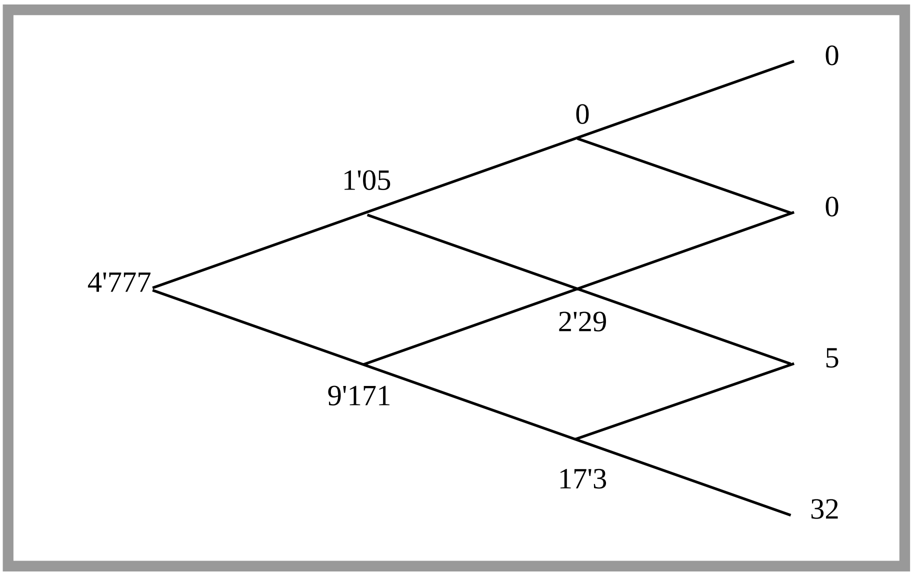
$$\frac{1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 2'2958}{1 + 0'091285} = 1'05189$$

$$\frac{1/2 \cdot 2'2958 + 1/2 \cdot 17'31}{1 + 0'068922} = 9'171$$

El precio hoy de la opción de compra resulta de la actualización de estos dos últimos valores aplicándoles previamente la condición de no arbitraje:

$$\frac{0'5 \times 1'05189 + 0'5 \times 9'171}{1'07} = 4'777$$

La evolución de los valores de la opción a tres años la podemos representar mediante el siguiente diagrama:



XIV. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Existen otros métodos más sofisticados para la valoración de bonos y de instrumentos financieros derivados sobre tipos de interés, pero el presentado aquí tiene la ventaja de que una vez entendido es muy sencillo de plantear ya que las ecuaciones son recursivas y por tanto no hay peligro de descuidarse de alguna. La solución se obtiene de manera rápida sin necesidad de aplicar ningún método complicado de cálculo.

Presenta una versatilidad y flexibilidad muy grande, ya que el análisis se puede realizar con la frecuencia que el analista estime conveniente. Lo único que debe hacer es introducir los tipos de rentabilidad (diario, semanal, etc.) equivalentes al tipo anual, así como transformar la volatilidad ajustándola a la nueva periodificación.

Si se trata de valorar bonos con cupón periódico en vez de bonos cupón cero, cada cupón expresado en unidades monetarias se debe considerar como un bono cupón cero y se actualiza al tipo cupón cero correspondiente al plazo de pago del cupón.

Si debido a las circunstancias del mercado se modifican los tipos y/o la volatilidad, tan sólo basta introducir los nuevos datos, y automáticamente quedan modificadas todas las cifras tanto de tipos cupón cero como los valores actuales del bono.

Permite además considerar diversos escenarios de tipos de rentabilidad y de volatilidad, así como de asignar diferentes probabilidades a cada uno de dichos escenarios. En este orden de ideas debemos tener en cuenta que la información disponible de los mercados es igual para todo el mundo y que el éxito de una operación depende tanto del planteamiento y ejecución inicial como del correcto seguimiento de la misma. Por tanto, el éxito de una operación en los mercados financieros depende:

- De la interpretación que se haga de la información disponible, y
- De la capacidad de adaptación al cambio en las condiciones del mercado.

En el modelo de valoración que proponemos, la información se introduce de manera cuantitativa al elegir los valores de alza y de baja, que condicionan en definitiva la evolución futura de los tipos, y, en consecuencia, de los valores del bono. Si la interpretación que se haga de la información disponible es correcta o no queda en manos del analista a la vista de los resultados obtenidos en el desarrollo cuantitativo del árbol, pudiendo contrastar en cada momento la bondad de la predicción efectuada.

APÉNDICE

DEDUCCIÓN DE LA MEDIA Y LA VARIANZA DEL TIPO DE RENTABILIDAD

Definamos el tipo de rentabilidad R_t de un bono en un período cualquiera t, por:

$$R_t = ln \frac{B_t}{B_{t-1}} \qquad \text{(A1)}$$

en la que B_t es el valor del bono al finalizar el período considerado y B_{t-1} es el precio inicial del bono. Para simplificar podemos considerar que el período es de un año.

Supongamos que el valor de un bono *B* es una variable aleatoria que puede tomar, al finalizar un período considerado, dos valores:

Ba con probabilidad *p*
Bb con probabilidad *1 – p*

siendo *Ba* > *B* > *Bb*, y supondremos para simplificar la exposición que $b = 1/a$.

La rentabilidad obtenida en caso de alza del valor del bono será:

$$R_t = ln \left[\frac{Ba}{B} \right] = lna \text{ con probabilidad } p \qquad \text{(A2)}$$

siendo en el caso de baja de

$$R_t = lnb = ln \left[\frac{1}{a} \right] = -lna \text{ con probabilidad } (1 - p) \qquad \text{(A3)}$$

El valor medio de esta variable aleatoria será:

$$E[R] = p \cdot lna + (1 - p) \cdot lnb = (2p - 1) \cdot lna \qquad \text{(A4)}$$

La varianza de R_t vendrá dada por:

$$\begin{aligned} Var(R) &= E[R^2] - [E(R)]^2 = \\ &= p \cdot (lna)^2 + (1 - p) \cdot (lnb)^2 - (2p - 1)^2 (lna)^2 = \\ &= (lna)^2 - (2p - 1)^2 (lna)^2 \end{aligned} \qquad \text{(A5)}$$

Cuando el número de observaciones tiende a infinito, la probabilidad de un alza o de una baja tenderán a ser iguales a *1/2* , con lo que:

$$\lim_{n \to \infty} Var(R) = (lna)^2 \quad \Rightarrow \quad Var(R) \cong (lna)^2 \qquad \text{(A6)}$$

Asimismo, si consideramos que *Var (R)* aumenta de forma lineal con el tiempo tendremos que:

$$Var(R) = \sigma^2 t \qquad \text{(A7)}$$

De (A6) y (A7) deducimos que:

$$(lna)^2 = \sigma^2 t \Rightarrow (lna) = \sigma \sqrt{t} \Rightarrow a = e^{\sigma \sqrt{t}} \quad \text{(A8)}$$

y:

$$b = e^{-\sigma \sqrt{t}} \quad \text{(A9)}$$

Si en vez de considerar *a* y *b*, tomamos los tipos de rentabilidad en cada estado r_a y r_b, la conclusión sería similar:

$$r_a = e^{\sigma \sqrt{t}} \quad \text{y} \quad r_b = e^{-\sigma \sqrt{t}} \quad \text{(A10)}$$

BIBLIOGRAFÍA

SOBRE VALORACIÓN DE INSTRUMENTOS DERIVADOS EN GENERAL

– AUGROS, Jean-Claude (1989) *Les options sur taux d'intérêt*, Economica, París.

– DATTATREYA, Ravi E. (editor), (1991) *Fixed income analytics*, McGraw-Hill Company, London.

– DEMANGE, G. et J.-Ch. ROCHET (1992) *Methodes mathematiques de la finance*, Economica, París.

– FABOZZI, Frank J. (1991) *The handbook of fixed income securities*, Richard D. Irwin, New York.

– FABOZZI, Frank J. (1993) *Bond markets, analysis and strategies*, Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey.

– GEMMILL, Gordon (1993) *Options pricing*, McGraw-Hill Company, London.

– HULL, John (1993) *Options, futures, and other derivative securities*, Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, New Jersey.

SOBRE MODELOS DE ARBITRAJE

– ROSS, Stephen (1976) «Risk, Return and Arbitrage». En Friend and J. Bicksler, eds., Ballinger, Cambridge.

– ROSS, Stephen (1978) «Simple Approach to the Valuation Risky Streams». *Journal of Business*, 51, núm. 3, págs. 453-475.

– VARIAN, Hal R. (1987) «The Arbitrage Principle in Financial Economics». *Economic Perspectives*, Volume 1, Number 2, Fall.