

CONTABILIDAD

MATEMATICAS FINANCIERAS

N.º 177

TRABAJO EFECTUADO POR:

---

**JUAN ROS RIERA**

---

*Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.  
Gestor de la Hacienda Pública.  
Profesor del Centro de Estudios Financieros*

---

### *Sumario:*

1. Cálculo de anualidades de préstamos y elección.
2. Importe de amortización en el decimocuarto año.
3. Valor finca en el inicio del arrendamiento.
4. Anualidad que amortiza el empréstito.
5. Opinión sobre la opción de permuta.

[Caso propuesto en la Oposición a ingreso en el *Cuerpo de Gestión de la Hacienda Pública*, 22 de julio de 1994. En el número anterior (140) se publicaron los ejercicios de contabilidad].



CONTABILIDAD	MATEMATICAS FINANCIERAS	N.º 177
		Enunciado

EL Sr. X es propietario de una finca rústica que adquirió el 1 de enero de 1980 por 15.000.000 de pesetas. El Sr. X obtuvo esta cantidad en dicha fecha mediante la concesión de un préstamo por el mismo importe. A este respecto, se le ofreció la oportunidad de elegir entre los dos préstamos siguientes:

*PRESTAMO A:*

- Duración 15 años.
- Tipo de interés 8%.
- Amortizable mediante anualidades variables en progresión aritmética de razón 10.000 pesetas, pagaderas al final de cada período.

*PRESTAMO B:*

- Duración 15 años.
- Tipo de interés 8%.
- Amortizable mediante anualidades constantes por el sistema alemán de intereses anticipados.

El Sr. X eligió el préstamo cuya primera anualidad, es decir, la de 1980, fuera menor.

En los años siguientes, el Sr. X cultivó la finca de forma directa, pero a partir del 1 de enero de 1993 la arrendó, habiéndose estipulado en el contrato correspondiente las cláusulas siguientes:

- La duración del arrendamiento será indefinida.
- Las rentas anuales netas serán pagadas al final de cada período, con un incremento anual de un 5% sobre las del anterior.

- La renta anual correspondiente al año 1993 será de 600.000 pesetas.
- El tipo de interés de mercado aplicable será del 7,5%.

Posteriormente, con fecha 1 de enero de 1995 se le ofrece al Sr. X la posibilidad de cambiar la finca antes citada por un paquete de 30.000 obligaciones de un empréstito emitido el 1 de enero de 1992, de acuerdo con las condiciones siguientes:

- Amortización mediante anualidades comerciales constantes.
- Valor nominal 1.000 pesetas.
- Número de títulos 1.000.000.
- Duración 20 años.
- Cupón anual pospagable 55 pesetas.
- Prima de reembolso 100 pesetas.

El tipo de interés de mercado aplicable sigue siendo el 7,5%.

SE PIDE:

1. Calcular las anualidades que amortizan ambos préstamos correspondientes al año 1980, y consecuentemente decir cuál es el préstamo que eligió el Sr. X.
2. Para el préstamo que eligió el Sr. X, calcular los importes de la línea decimocuarta de su cuadro de amortización, es decir, la correspondiente al año 1993.

Cuota de amortización del año 1993.

Cuota de intereses.

Deuda pendiente al comienzo del año 1993.

Total amortizado al final de ese año.

3. Calcular el valor de la finca rústica en el momento de la firma del contrato de arrendamiento.
4. Calcular el importe de la anualidad comercial que amortiza el empréstito.
5. Opinar si al 1 de enero de 1995 le va a interesar al Sr. X el ejercicio de la opción de permuta, realizando para ello los cálculos pertinentes.

CONTABILIDAD	MATEMATICAS FINANCIERAS	N.º 177
		Solución

### 1. Anualidades de los préstamos.

*PRESTAMO A:*

Es un préstamo con anualidades variables en progresión aritmética y pospagable, cuyos parámetros principales son:

- Duración ( $n$ ) = 15 años  
 Tipo de interés ( $i$ ) = 8%  
 Razón de la progresión ( $d$ ) = 10.000 ptas.  
 Importe del préstamo ( $C_1$ ) = 15.000.000 ptas.

La fórmula que relaciona estos parámetros con la anualidad del 1<sup>er</sup> año ( $a_1$ ) del mismo es:

$$C_1 = \left[ a_1 + \frac{d}{i} + n \times d \right] \times a_{\overline{n}|i} - \frac{n \times d}{i}$$

Sustituyendo valores, resulta:

$$15.000.000 = \left[ a_1 + \frac{10.000}{0,08} + 15 \times 10.000 \right] \times a_{\overline{15}|0,08} - \frac{15 \times 10.000}{0,08}$$

Despejando la anualidad  $a_1$ :

$$a_1 = 1.696.498,57 \text{ ptas.}$$

**PRESTAMO B:**

Es un préstamo con anualidades constantes y pospagables, por el sistema alemán de intereses anticipados. Los parámetros principales son:

Duración ( $n$ )	=	15 años
Tipo de interés ( $i$ )	=	8%
Importe del préstamo ( $C_1$ )	=	15.000.000 ptas. suponiendo que la cuantía del préstamo es del mismo importe que el precio de adquisición de la finca. (Nota 1).

La fórmula que relaciona los parámetros anteriores con la anualidad ( $a$ ) del mismo es:

$$C_1 = a \times \frac{1 - (1 - i)^n}{i}$$

Sustituyendo valores, resulta:

$$15.000.000 = a \times \frac{1 - (1 - 0,08)^{15}}{0,08}$$

Despejando la anualidad:

$$a = 1.681.372,61 \text{ ptas.}$$

El Sr. X elegirá el préstamo B por tener una menor anualidad.

**NOTA (1):**

El enunciado del supuesto puede ser interpretado también estableciendo que el efectivo percibido en el préstamo alemán sea 15.000.000 de pesetas. Es decir, que la diferencia entre el principal concedido y los intereses del primer período que se pagan anticipadamente son precisamente la cantidad necesaria para adquirir la finca. De este modo, el importe del préstamo será ahora:

$$C_1 - 0,08 C_1 = 15.000.000$$

$$C_1 = 16.304.348 \text{ ptas.}$$

Y la anualidad del mismo será:

$$16.304.348 = a \times \frac{1 - (1 - 0,08)^{15}}{0,08}$$

$$a = 1.827.578,95 \text{ ptas.}$$

## 2. Línea decimocuarta (año 93) del cuadro de amortización del préstamo B.

En los préstamos con intereses anticipados se verifica en el último período:

$$M_n = a = C_n \quad (n = 15)$$

Es decir, la amortización del último período es igual a la anualidad y, como en todo préstamo, igual a la deuda viva al inicio del último período.

a) *Cuota de amortización* ( $M_{14}$ ).

$$M_{14} = M_{15} \times (1 - i) = a \times (1 - i) = 1.681.372,61 \times (1 - 0,08) = 1.546.862,81 \text{ ptas.}$$

b) *Cuota de intereses* ( $I_{14}$ ).

$$I_{14} = a - M_{14} = 1.681.372,61 - 1.546.862,81 = 134.509,8$$

También puede calcularse:

$$I_{14} = C_{14} \times 0,08$$

c) *Deuda pendiente al comienzo del año* ( $C_{14}$ ).

A partir de la fórmula:

$$C_{k+1} = a \times \frac{1 - (1 - i)^{n-k}}{i} \quad (\text{para } k = 13)$$

$$C_{14} = 1.681.372,61 \times \frac{1 - (1 - 0,08)^2}{0,08} = 3.228.235,42 \text{ ptas.}$$

También puede calcularse a partir de:

$$C_{14} = M_{14} + M_{15}$$

d) *Total amortizado al final del año* ( $m_{14}$ ).

$$m_{14} = C_1 - M_{15} = 15.000.000 - 1.681.372,61 = 13.318.627,39$$

También puede calcularse a partir de la fórmula:

$$m_k = a \times \frac{(1 - i)^{n-k} - (1 - i)^n}{i} \quad (\text{para } k = 14)$$

---

**NOTA (2):**

De acuerdo con la interpretación establecida en la Nota (1), la decisión del Sr. X será elegir el préstamo A.

Determinemos la línea decimocuarta (año 93) del cuadro de amortización del préstamo A.

a) *Anualidad* ( $a_{14}$ ).

$$a_{14} = a_1 + 13 \times 10.000 = 1.696.498,57 + 130.000 = 1.826.498,57 \text{ ptas.}$$

b) *Deuda pendiente al comienzo del año* ( $C_{14}$ ).

A partir de la fórmula:

$$C_{k+1} = \left[ a_{k+1} + \frac{d}{i} + (n-k) \times d \right] a_{\overline{n-k}|i} - \frac{(n-k) \times d}{i}$$

(para  $k = 13$ )

De donde, sustituyendo valores:

$$C_{14} = \left[ a_{14} + \frac{10.000}{0,08} + 2 \times 10.000 \right] a_{\overline{2}|0,08} - \frac{2 \times 10.000}{0,08} = 3.265.703,90 \text{ ptas.}$$

c) *Cuota de intereses* ( $I_{14}$ ).

$$I_{14} = C_{14} \times 0,08 = 3.265.703,90 \times 0,08 = 261.256,31 \text{ ptas.}$$

d) *Cuota de amortización* ( $M_{14}$ ).

$$M_{14} = a_{14} - I_{14} = 1.826.498,57 - 261.256,31 = 1.565.242,26 \text{ ptas.}$$

También puede calcularse mediante:

$$M_k = M_1 (1 + i)^{k-1} + d \times I_{\overline{k-1}|i}$$

$$M_1 = a_1 - I_1 = 1.696.498,57 - 15.000.000 \times 0,08 = 496.498,57$$

$$M_{14} = 496.498,57 \times (1,08)^{13} + 10.000 \times I_{\overline{13}|0,08} = 1.565.242,26$$

e) *Total amortizado al final del año* ( $m_{14}$ ).

$$m_{14} = C_1 - C_{14} + M_{14} = 15.000.000 - 3.265.703,90 + 1.565.242,26 = 13.299.538,36 \text{ ptas.}$$

También puede calcularse mediante:

$$C_{15} = \left[ a_{15} + \frac{10.000}{0,08} + 1 \times 10.000 \right] \times \frac{1}{1,08} - \frac{1 \times 10.000}{0,08}$$

Siendo:

$$a_{15} = 1.836.498,57$$

$$C_{15} = 1.700.461,64 = M_{15}$$

$$m_{14} = C_1 - M_{15} = 15.000.000 - 1.700.461,64 = 13.299.538,36$$

### 3. Valor de la finca al 1 de enero de 1993.

Será el valor actual de la renta esperada, que es una renta en progresión geométrica de razón  $q = 1,05$ , pospagable y perpetua, cuyo primer término es  $C = 600.000$  pesetas y el tipo de interés es 7,5%. La fórmula que relaciona estos parámetros es:

$$A_{c, q \infty | i} = \frac{C}{1 + i - q}$$

De donde:

$$\text{Valor de la finca} = \frac{600.000}{1 + 0,075 - 1,05} = 24.000.000 \text{ ptas.}$$

#### 4. Anualidad del empréstito.

Es un empréstito cuyo nominal  $C = 1.000$  pesetas no coincide con el valor de reembolso  $C_R = 1.100$  pesetas. Para determinar la anualidad procederemos a la normalización:

$$\text{Tanto normalizado } i' = \frac{C \cdot i}{C_R} = \frac{1.000 \times 0,055}{1.100} = 0,05$$

La anualidad se obtendrá despejando de la siguiente fórmula:

$$N_1 \times C_R = a \times a_{\overline{n}|i'}$$

De donde, sustituyendo:

$$1.000.000 \text{ títulos} \times 1.100 = a \times a_{\overline{20}|0,05}$$

Luego:

$$a = 88.266.845,91 \text{ ptas.}$$

#### 5. Permuta de la finca rústica por obligaciones (1-1-1995).

a) *Valor de la finca rústica al 1 de enero de 1995:*

$$V_{FR} = \frac{600.000 \times (1,05)^2}{1 + 0,075 - 1,05} = \frac{661.500}{1,075 - 1,05} = 26.460.000 \text{ ptas.}$$

b) *Valor de 30.000 obligaciones al 1 de enero de 1995:*

Títulos vivos al inicio del año 4 ( $N_4$ ):

$$N_4 \times 1.100 = a \times a_{\overline{20-3}|0,05}$$

sustituyendo resulta:

$$N_4 \times 1.100 = 88.266.845,91 \times a_{\overline{17}|0,05}$$

y despejando:

$$N_4 = 904.660 \text{ títulos (aproximadamente)}$$

El valor actual medio de una obligación será el cociente entre el valor actualizado de las anualidades pendientes al tanto de mercado y el número de obligaciones vivas. Así:

$$\text{V. actual oblig.} = \frac{a \times a_{\overline{17}|0,075}}{N_4} = \frac{88.266.845,91 \times 9,43}{904.660} = 920,46 \text{ ptas./obligación}$$

Como el Sr. X debe optar por el canje de 30.000 obligaciones, será:

$$30.000 \times 920,46 = 27.613.883,85 \text{ ptas.}$$

Por tanto, el Sr. X cambiará la finca rústica por las 30.000 obligaciones del empréstito.